М. В. Ткачева
Н. Е. Федорова

Элементы статистики и вероятность

7-9

·Просвещение·

Условные обозначения

▶ начало решения задачи

◁ окончание решения задачи

● начало обоснования утверждения или вывода формулы

○ окончание обоснования или вывода

 начало дополнительного более сложного материала или трудная задача

 окончание дополнительного материала

М. В. Ткачева
Н. Е. Федорова

Элементы статистики и вероятность

учебное пособие для

7-9

классов общеобразовательных учреждений

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации

2-е издание

Москва
·Просвещение·
2005

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
Т48

Ткачева М. В.

Т48 Элементы статистики и вероятность : учеб. пособие для 7—9 кл. общеобразоват. учреждений / М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова.— 2-е изд.— М. : Просвещение, 2005.— 112 с. : ил.— ISBN 5-09-013957-1.

Данное пособие является дополнением к учебникам «Алгебра, 7, 8, 9» авт. Ш. А. Алимова и др. 1999—2005 гг.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

Учебное издание

Ткачева Мария Владимировна
Федорова Надежда Евгеньевна

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ И ВЕРОЯТНОСТЬ

Учебное пособие для 7—9 классов общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова.* Редактор *Л. Н. Белоновская.* Младший редактор *Н. В. Сидельковская.* Художник *Е. В. Соганова.* Художественный редактор *А. В. Крикунов.* Компьютерная графика: *В. В. Брагин.* Технические редакторы *С. Н. Терехова, Н. А. Киселева.* Корректоры *Н. В. Белозерова, Н. В. Бурдина, Л. С. Вайтман, О. Н. Леонова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с диапозитивов 04.10.04. Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,0. Усл. кр.-отт. 7,62. Уч.-изд. л. 5,59. Тираж 10 000 экз. Заказ № 13930.

Федеральное государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени «Издательство «Просвещение» Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

ISBN 5-09-013957-1

Глава I
Введение в комбинаторику

§ 1. Исторические комбинаторные задачи

В математике существует немало задач, в которых требуется из имеющихся элементов составить различные наборы, подсчитать количество всевозможных комбинаций элементов, образованных по определенному правилу. Такие задачи называются комбинаторными, а раздел математики, занимающийся решением этих задач, называется *комбинаторикой*.

Некоторые комбинаторные задачи решали еще в Древнем Китае, а позднее — в Римской империи. Однако как самостоятельный раздел математики комбинаторика оформилась в Европе лишь в XVIII в. в связи с развитием теории вероятностей.

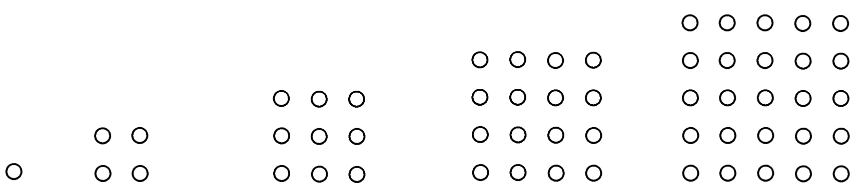
1. Фигурные числа

В древности для облегчения вычислений часто использовали камешки. При этом особое внимание уделялось числу камешков, которые можно было разложить в виде правильной фигуры. Так появились *квадратные числа* (1, 4, 16, 25, ...). На рисунке 1 показано правило их образования. Любое n-е по порядку квадратное число находится по формуле

$$N_{\text{кв}} = n^2. \tag{1}$$

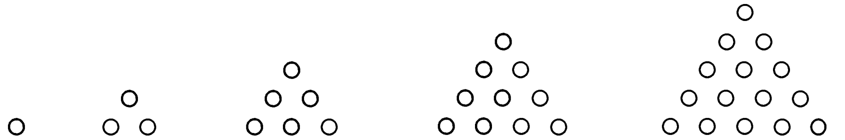
Были сконструированы *треугольные* (1, 3, 6, 10, 15, ...) и *пятиугольные* (1, 5, 12, 22, ...) *числа*. На рисунках 2 и 3 показан способ образования этих чисел. Любое n-е по порядку треугольное число можно найти по формуле

$$N_{\text{тр}} = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{2}$$



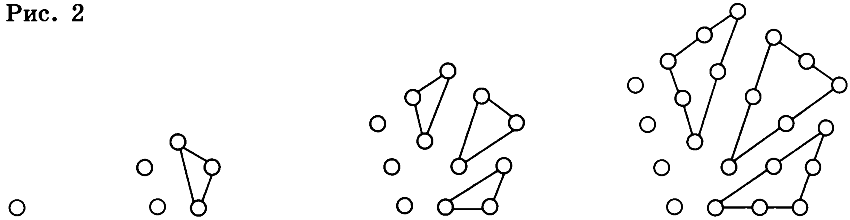
$1 \quad 2\cdot2=2^2=4 \quad 3\cdot3=3^2=9 \quad 4\cdot4=4^2=16 \quad 5\cdot5=5^2=25$

Рис. 1



1 $\quad$ 1+2=3 $\quad$ 1+2+3=6 $\quad$ 1+2+3+4=10 $\quad$ 1+2+3+4+5=15

Рис. 2



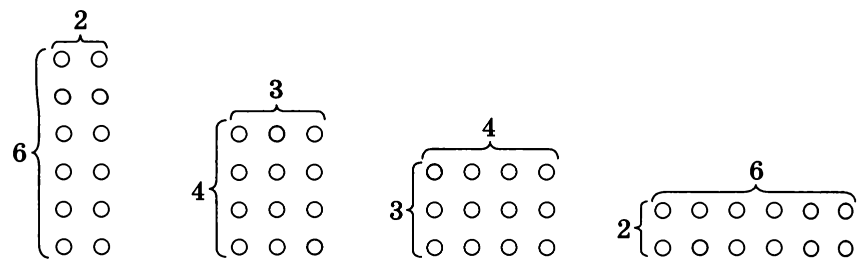
$1 \qquad 2+3\cdot\frac{2(2-1)}{2}=5 \qquad 3+3\cdot\frac{3(3-1)}{2}=12 \qquad 4+3\cdot\frac{4(4-1)}{2}=22$

Рис. 3

а пятиугольное — по формуле

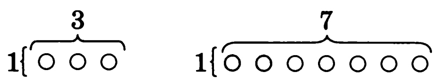
$$N_{\text{пят}}=n+3\cdot\frac{n(n-1)}{2}. \tag{3}$$

Все составные числа древние математики представляли в виде прямоугольников размером $m\times n$, выложенных из камней, где обязательно $m\neq 1$ и $n\neq 1$ (на рисунке 4 изображены всевозможные представления составного числа 12). Простые числа представляли в виде линий $1\times n$ (рис. 5). В связи с этим составные числа древние ученые называли *прямоугольными*, а простые — *непрямоугольными числами*.



$12 = 6\cdot 2 \qquad 12 = 4\cdot 3 \qquad 12 = 3\cdot 4 \qquad 12 = 2\cdot 6$

Рис. 4



$3 = 1\cdot 3 \qquad 7 = 1\cdot 7$

Рис. 5

Задача 1. Найти седьмое по порядку:

1) квадратное число;
2) треугольное число;
3) пятиугольное число.

1) По формуле (1) при $n=7$ находим $N_{\text{кв}}=7^2=49$.

2) По формуле (2) при $n=7$ находим

$$N_{\text{тр}}=\frac{7(7+1)}{2}=\frac{56}{2}=28.$$

3) По формуле (3) при $n=7$ находим

$$N_{\text{пят}}=7+3\cdot\frac{7(7-1)}{2}=7+3\cdot 21=70.$$

2. Магические квадраты

Поместим натуральные числа от 1 до 9 в клетках квадрата размером 3×3 таким образом, чтобы все суммы чисел по горизонтали и по вертикали, а также по диагоналям были одинаковы и равны 15 (рис. 6). Полученный квадрат, а также другие квадраты с теми же свойствами называют *магическими квадратами*. Известно, что составлением магических квадратов увлекались в Древнем Китае несколько тысяч лет назад.

Магического квадрата размером 2×2 не существует. Существует единственный магический квадрат 3×3, изображенный на рисунке 6. Внешне отличные от него варианты квадрата 3×3 можно получить либо зеркальным отражением чисел относительно осей симметрии рассмотренного квадрата (их у квадрата 4, см. рис. 7), либо поворотом на 90° вокруг центра квадрата (на рисунке 8 — это точка O).

Задача 2. Составить магический квадрат, полученный из квадрата, изображенного на рисунке 6:

1) зеркальным отражением клеток от горизонтальной оси симметрии квадрата;

2) поворотом клеток квадрата на 90° вокруг его центра против часовой стрелки.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Рис. 6

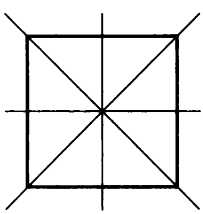


Рис. 7

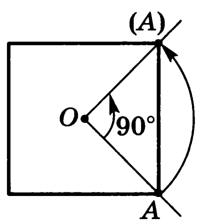


Рис. 8

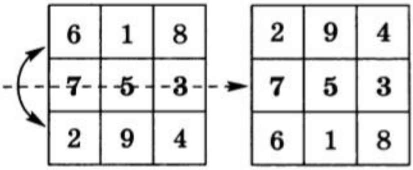


Рис. 9

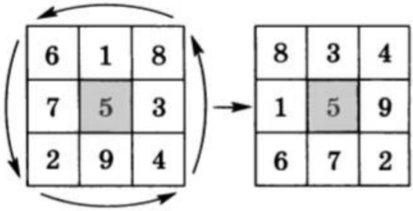


Рис. 10

1) На рисунке 9 показано, как из исходного магического квадрата получается новый магический квадрат (после зеркального отражения чи́сла в клетках записаны в привычном для прочтения виде).

2) На рисунке 10 показано получение нового магического квадрата поворотом на 90° против часовой стрелки клеток данного квадрата вокруг его центра (после этого чи́сла в клетках записаны в привычном для прочтения виде).

С увеличением количества клеток растет число возможных магических квадратов. Например, число всевозможных магических квадратов размером 4×4 (с записью в его клетках чисел от 1 до 16 по оговоренным правилам) уже 880, а число магических квадратов 5×5 более 200 000.

Пример магического квадрата размером 4×4 приведен на рисунке 11.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Рис. 11

3. Латинские квадраты

Латинскими квадратами называют квадраты размером $n \times n$ клеток, в которых записаны натуральные числа от 1 до n, причем таким образом, что в каждой строке и в каждом столбце встречаются все эти числа по одному разу. На рисунке 12 изображен латинский квадрат 3×3. На рисунке 13, *а* изображены два латинских квадрата 4×4, которые имеют особенность: если один наложить на другой (например, второй квадрат сделать из прозрачной бумаги и наложить на первый), то все пары образовавшихся двузначных чисел (рис. 13, *б*) будут различными. Такие пары латинских квадратов называют *ортогональными*.

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Рис. 12

I

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

II

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

а)

1 1	2 2	3 3	4 4
2 3	1 4	4 1	3 2
3 4	4 3	1 2	2 1
4 2	3 1	2 4	1 3

б)

Рис. 13

Задача 3. Составить латинский квадрат, ортогональный квадрату, изображенному на рисунке 12.

▶ Запишем числа изображенного на рисунке 12 квадрата в левой половине клеток (рис. 14, *а*). Допишем справа от них такие цифры, чтобы в клетках образовались всевозможные двузначные числа, составленные из цифр 1, 2 и 3. Будем следить за тем, чтобы вторые цифры чисел в строках и столбцах не повторялись. Затем образуем квадрат из вторых цифр полученных в клетках чисел (рис. 14, *б*). ◁

1 1	2 2	3 3
2 3	3 1	1 2
3 2	1 3	2 1

а)

1	2	3
3	1	2
2	3	1

б)

Рис. 14

Историческая справка

Впервые задачу построения латинских квадратов сформулировал Л. Эйлер (1707—1783), причем в такой форме: «Среди 36 офицеров 6 улан, 6 драгун, 6 гусар, 6 кирасир, 6 кавалергардов и 6 гренадеров и, кроме того, среди них поровну генералов, полковников, майоров, капитанов, поручиков и подпоручиков. При этом каждый род войск представлен офицерами всех шести рангов. Можно ли этих офицеров выстроить в каре 6×6 так, чтобы в любой колонне и в любой шеренге были офицеры всех рангов?»

Эйлер не смог решить эту задачу, а позднее, в 1901 г., математики доказали, что ортогональных латинских квадратов 6×6 не существует. И лишь в 1959 г. с помощью ЭВМ было обосновано, что для любого n, кроме 6, существуют ортогональные квадраты размером $n \times n$.

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
2	3	4	5	1
5	1	2	3	4
3	4	5	1	2

Рис. 15

На рисунке 15 представлен вариант эйлеровых ортогональных латинских квадратов 5×5 для: **а)** 5 улан (в **первом** квадрате обозначены цифрой 1), 5 драгун (обозначены цифрой 2), 5 гусар (обозначены цифрой 3), 5 кирасир (обозначены цифрой 4), 5 кавалергардов (обозначены цифрой 5); **б)** 5 генералов (во **втором** квадрате обозначены цифрой 1), 5 полковников (обозначены цифрой 2), 5 майоров (обозначены цифрой 3), 5 капитанов (обозначены цифрой 4) и 5 поручиков (обозначены цифрой 5).

Упражнения

1. Подсчитать число однобуквенных слов русского языка.

2. Перечислить знакомые виды: 1) четырехугольников; 2) треугольников.

3. Составить все возможные двухбуквенные слова, используя буквы: 1) ы, т, в; 2) н, о, а.

4. Подсчитать, сколько среди изображений букв А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К найдется букв, имеющих: 1) вертикальную ось симметрии; 2) горизонтальную ось симметрии.

5. Записать первые двенадцать квадратных чисел.

6. Записать n-е по порядку квадратное число, если: 1) $n=20$; 2) $n=25$; 3) $n=31$; 4) $n=50$.

7. Каким по порядку квадратным числом является число: 1) 169; 2) 225; 3) 324; 4) 3600?

8. Записать первые десять треугольных чисел.

4	9	
	5	

4		
9	5	

	5	
4	3	

3	5	
4		

Рис. 16

2		

		2

		2

2		

3		
	1	

1		
	2	

		2
	3	

	3	
		2

Рис. 17

9. Записать n-е по порядку треугольное число, если: 1) $n=20$; 2) $n=21$; 3) $n=33$; 4) $n=34$.

10. Записать n-е по порядку пятиугольное число, если: 1) $n=5$; 2) $n=6$.

11. Изобразить в древних традициях с помощью кружков (камешков) простое число: 1) 5; 2) 11.

12. Изобразить в древних традициях всеми возможными способами составное число: 1) 6; 2) 8; 3) 18; 4) 20.

13. Продолжить составление магических квадратов 3×3 на рисунке 16.

3	1	2
1	2	3
2	3	1

2	3	1
3	1	2
1	2	3

Рис. 18

14. Продолжить составление латинских квадратов 3×3 на рисунке 17.

15. На рисунке 18 даны латинские квадраты. Составить ортогональные им латинские квадраты.

16. Используя повороты и осевые симметрии, построить несколько магических квадратов 4×4, беря за основу квадрат, изображенный на рисунке 11.

17. Продолжить составление латинских квадратов, изображенных на рисунке 19.

18. На рисунке 20 изображены латинские квадраты. Составить ортогональные им латинские квадраты.

19. На рисунке 21 изображены приложенные друг к другу два одинаковых n-х по порядку треугольных числа (одно выложено из черных камней, другое, «перевернутое»,— из белых). С помощью этого рисунка обосновать, почему n-е по порядку треугольное число находится по формуле $N_{\text{тр}} = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

4	3	2	1
3			
2			
1			

2	4	3	1
4			
3			
1			

Рис. 19

3	2	1	4
2	1	4	3
1	4	3	2
4	3	2	1

1	3	2	4
2	4	1	3
3	2	4	1
4	1	3	2

Рис. 20

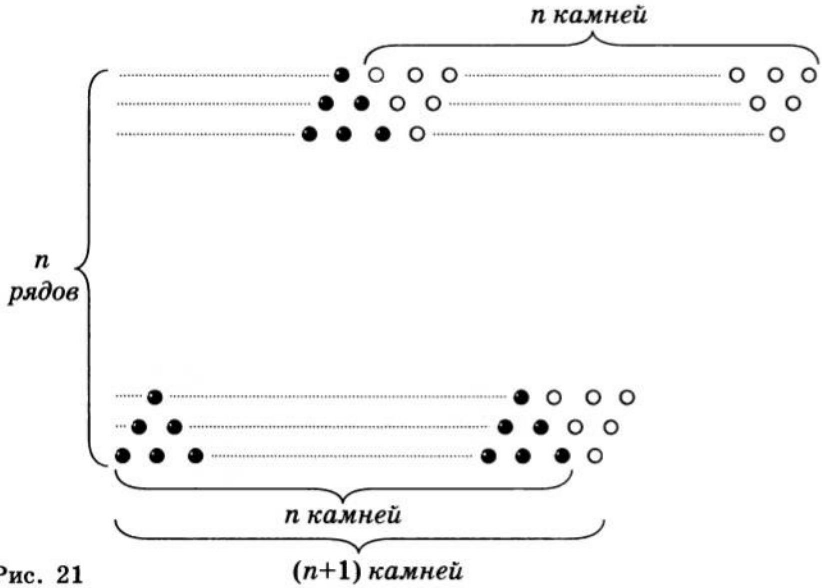


Рис. 21

§ 2. Различные комбинации из трех элементов

Нередко в жизни возникают ситуации, когда задача имеет не одно, а несколько решений, которые нужно сравнить, а может быть, и выбрать наиболее подходящее для конкретной ситуации. Например, при рассмотрении меню обеда в столовой человек мысленно составляет комбинации из различных первых, вторых и третьих блюд, после чего делает выбор согласно своему вкусу и совместимости продуктов.

Рассмотрим простейшие задачи, связанные с составлением различных комбинаций из трех элементов.

Задача 1. Три друга — Антон, Борис и Виктор — приобрели два билета на футбольный матч. Сколько существует различных вариантов посещения футбольного матча для троих друзей?

▶ По имеющимся двум билетам на матч могут пойти: 1) либо Антон и Борис; 2) либо Антон и Виктор; 3) либо Борис и Виктор

Ответ. 3 варианта. ◁

Задача 2. Три друга — Антон, Борис и Виктор — приобрели два билета на футбольный матч на 1-е и 2-е места первого ряда стадиона. Сколько у друзей есть вариантов (способов) занять эти два места на стадионе? Записать все эти варианты.

▶ Для удобства перечисления всех возможных вариантов рассаживания друзей на 1-е и 2-е места будем вместо полных имен мальчиков записывать лишь их первые буквы. При этом запись АБ будет означать, что на первом месте сидит Антон, а на втором — Борис. Способ составления комбинаций будет следующим: после записи каждой пары имен мальчиков, идущих на матч (по результатам решения задачи 1 таких пар 3), будем записывать новую пару, полученную перестановкой в ней букв (обозначающую результат пересаживания каждого мальчика со своего места на место друга):

$$\text{АБ; БА; АВ; ВА; БВ; ВБ.} \qquad (1)$$

Ответ. 6 способов: АБ; БА; АВ; ВА; БВ; ВБ. ◁

Заметим, что пары мальчиков, составленные в задачах 1 и 2, существенно отличались друг от друга. В первой задаче нас не интересовал порядок рассаживания двух из трех мальчиков по местам, т. е. пары А и Б, Б и А считались одной и той же парой мальчиков, идущих на матч. Во второй же задаче пары АБ и БА были различными парами, так как нас интересовал и порядок рассаживания мальчиков на двух местах (поэтому в задаче 2 количество вариантов пар было в 2 раза больше, чем в первой).

Говоря математическим языком, в задаче 1 были составлены всевозможные *сочетания* из трех элементов по два: пары элементов, выбранных из имеющихся трех элементов. Пары отличались друг от друга лишь составом элементов, а порядок расположения элементов в паре не учитывался. В задаче 2 из тех же трех элементов выбирались пары элементов и фиксировался их порядок расположения в паре, т. е. все составленные пары отличались друг от друга либо составом элементов, либо их расположением в паре. В комбинаторике такие пары называют *размещениями* из трех элементов по два.

Договоримся, что, если нужно представить комбинацию некоторых элементов, в которой **порядок** расположения элементов **не важен**, будем записывать (перечислять) эти элементы через запятую (например: А, Б и Б, А — одна и та же пара элементов). Если же **порядок** расположения элементов в комбинации **важен**, то в последовательной записи элементов отделять их друг от друга запятой не будем (например, АБ и БА — разные пары).

Задача 3. Антону, Борису и Виктору повезло, и они купили 3 билета на футбол на 1, 2 и 3-е места первого ряда стадиона. Сколькими способами могут занять мальчики эти места?

Число способов будет таким же, как и в задаче 2. Действительно, если к каждой паре мальчиков из записи (1), сидящих на 1-м и 2-м местах, посадить на 3-е место их друга, ранее не попавшего (по условию задачи 2) на матч, то будут составлены всевозможные варианты (обозначенные тройками букв) рассаживания мальчиков по трем местам:

$$\text{АБВ; БАВ; АВБ; ВАБ; БВА; ВБА.} \qquad (2)$$

Ответ. 6 способами.

Говоря языком математики, в задаче 3 были составлены всевозможные *перестановки* из трех элементов — комбинации из трех элементов, отличающиеся друг от друга порядком расположения в них элементов.

Задача 4. Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2 и 3 при условии, что цифры в числе: 1) должны быть различными; 2) могут повторяться?

▶ 1) Способ составления трехзначных чисел из 3 различных цифр аналогичен способу записи (2) троек букв в задаче 3:

$$123,\ 213,\ 132,\ 312,\ 231,\ 321. \qquad (3)$$

Получили 6 чисел.

2) Перебор вариантов можно организовать следующим образом. Выпишем все числа, начинающиеся с цифры 1 в порядке их возрастания; затем — начинающиеся с цифры 2; после чего — начинающиеся с цифры 3:

111	112	113	211	212	213	311	312	313
121	122	123	221	222	223	321	322	323
131	132	133	231	232	233	331	332	333

Получили 27 чисел.

Ответ. 1) 6; 2) 27. ◁

Упражнения

1. (Устно.) Сколько подарочных наборов можно составить: 1) из одного предмета; 2) из двух предметов, если в наличии имеются одна ваза и одна ветка сирени?

2. (Устно.) Сколькими способами Петя и Вова могут занять 2 места за одной двухместной партой?

3. Сколько различных по комплектации парфюмерных наборов из двух предметов можно составить, если в наличии имеются одинаковые флаконы одеколона и одинаковые куски мыла?

4. С помощью цифр 2 и 3 записать все возможные двузначные числа, в которых цифры: 1) должны быть разными; 2) могут повторяться.

5. Имеются помидоры (п), огурцы (о) и лук (л). Сколько различных салатов можно приготовить, если в каждый из них должны входить в равных долях 2 различных вида овощей? Записать все сочетания овощей в составляемых салатах.

6. Имеются 3 предмета: карандаш, тетрадь и линейка. Сколькими способами из этих канцелярских принадлежностей можно выбрать: 1) один предмет; 2) 3 предмета; 3) 2 предмета?

7. Боря идет на день рождения к одноклассникам, близнецам Алеше и Яше. Он хочет подарить каждому из них по мячу. В магазине остались для продажи только 3 мяча разных цветов: белый, черный и пятнистый. Сколькими способами, купив 2 мяча, Боря может сделать подарки братьям?

8. Ашот (А), Марат (М) и Сергей (С) могут занять 1, 2 и 3-е призовые места в соревнованиях. Перечислить все возможные последовательности из имен мальчиков, где порядковый номер в последовательности соответствует занятому мальчиком месту в соревнованиях. Подсчитать их количество.

9. В магазине продают кепки трех цветов: белые (б), красные (к) и синие (с). Кира и Лена покупают себе по одной кепке. Сколько существует различных вариантов покупок для этих девочек? Перечислить их.

10. Перечислить все двузначные числа, в записи которых встречаются только цифры 2, 3 и 4, если: 1) одинаковых цифр в числах не должно быть; 2) цифры в числах могут повторяться.

11. Перечислить все двузначные числа, в записи которых встречаются только цифры 0, 1 и 2, если: 1) одинаковых цифр в числах не должно быть; 2) цифры в числах могут повторяться.

12. Перечислить все трехзначные числа, в записи которых встречаются только цифры 1 и 2.

---

13. Перечислить все трехзначные числа, в записи которых используются цифры 0, 1 и 2, при условии, что: 1) все цифры в числах различны; 2) цифры в числах могут повторяться.

14. У жителей планеты ХО в алфавите три буквы: А, О, Х. Слова в языке состоят не более чем из трех букв (буква в слове может повторяться). Какое наибольшее количество слов может быть в словаре жителей этой планеты?

15. Правила игры «Детская типография» таковы. Выбирается любое слово — нарицательное имя существительное (желательно с большим числом букв). Все играющие в секрете друг от друга из букв выбранного слова составляют всевозможные новые слова — имена существительные (в новом слове буква используется не чаще, чем она встречается в исходном слове). Побеждает тот, кто за условленное время составит больше слов. (В игре «Взрослая типография» победителем считается тот, у кого больше сумма всех букв в составленных словах.)
Задание. Сыграть в игру «Детская типография», используя слово: 1) полк; 2) комбинаторика.

§ 3. Таблица вариантов и правило произведения

Для решения комбинаторных задач существуют различные средства, исключающие возможность «потери» какой-либо комбинации элементов. Для подсчета числа комбинаций из двух элементов таким средством является *таблица вариантов.*

Задача 1. Записать всевозможные двузначные числа, используя при этом цифры: 1) 1, 2 и 3; 2) 0, 1, 2 и 3. Подсчитать их количество N.

Для подсчета образующихся чисел составим таблицы:

1-я цифра	2-я цифра		
	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

$N=3\cdot3=9$

1-я цифра	2-я цифра			
	0	1	2	3
1	10	11	12	13
2	20	21	22	23
3	30	31	32	33

$N=3\cdot4=12$

Ответ. 1) $N=9$; 2) $N=12$.

Задача 2. Бросаются две игральные кости (на рисунке 22 изображена игральная кость — кубик с отмеченными на его гранях очками, а также развертка этого кубика). Сколько различных пар очков может появиться на верхних гранях костей?

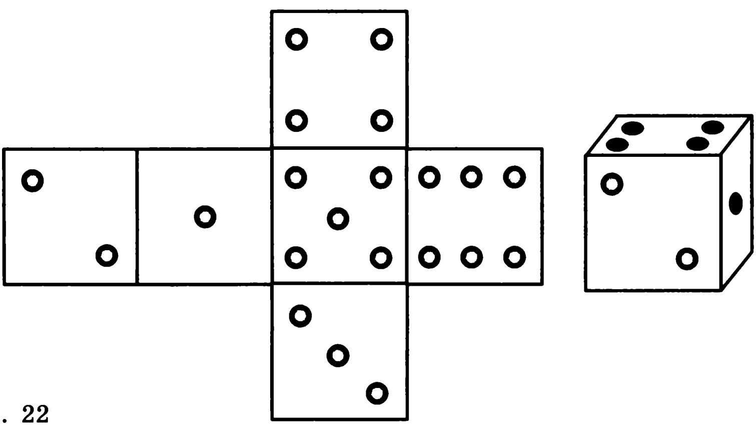


Рис. 22

С помощью составленной ниже таблицы пар выпавших очков можно утверждать, что число всевозможных пар равно $6 \cdot 6 = 36$.

Число очков на I кости	Число очков на II кости					
	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Ответ. 36.

Для решения задач, аналогичных задачам 1 и 2, необязательно каждый раз составлять таблицу вариантов. Можно пользоваться следующим правилом, которое получило в комбинаторике название «Правило произведения»:

Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них есть m вариантов выбора второго элемента, то всего существует $n \cdot m$ различных пар с выбранными первым и вторым элементами.

Задача 3. Катя и Оля приходят в магазин, где продают в любом количестве плитки шоколада трех видов. Каждая девочка покупает по одной плитке. Сколько существует способов покупки?

Катя может купить плитку любого из трех видов шоколада ($n = 3$). Оля может поступить аналогично ($m = 3$). Пару шоколадок для Кати и для Оли можно составить $n \cdot m = 3 \cdot 3 = 9$ различными способами.

Ответ. 9.

Задача 4. Имеются три плитки шоколада различных видов. Катя и Оля по очереди выбирают себе по одной плитке. Сколько существует различных способов выбора шоколадок для Кати и Оли?

Допустим, первой шоколадку выбирает Катя. У нее есть 3 возможности выбора плитки ($n = 3$). После этого Оля может выбрать одну из двух оставшихся плиток ($m = 2$). Тогда способов выбрать пару шоколадок для Кати и для Оли существует $n \cdot m = 3 \cdot 2 = 6$.

Ответ. 6.

Задача 5. Сколько существует различных двузначных кодов, составленных с помощью букв А, Б, В, Г и Д, если буквы в коде: 1) могут повторяться; 2) должны быть различными?

1) Первой буквой в коде может быть любая из данных пяти букв ($n = 5$), второй — также любая из пяти ($m = 5$). Согласно правилу произведения число всевозможных пар букв (с возможным их повторением в паре) равно

$$n \cdot m = 5 \cdot 5 = 25.$$

2) Первой буквой в коде может быть любая из пяти данных букв ($n = 5$), а второй — любая из четырех, отличных от первой ($m = 4$). Согласно правилу произведения число двузначных кодов с различными буквами будет равно

$$n \cdot m = 5 \cdot 4 = 20.$$

Ответ. 1) 25; 2) 20.

Упражнения

1. Пользуясь таблицей вариантов, перечислить все двузначные числа, записанные с помощью цифр: 1) 3, 4, 5; 2) 7, 8, 9.
2. С помощью таблицы вариантов перечислить всевозможные двухбуквенные коды (буквы в коде могут повторяться), в которых используются буквы: 1) а, б, в; 2) x, y, z.
3. Пользуясь таблицей вариантов, перечислить все двузначные числа, в записи которых используются цифры 7, 8, 9, 0, и подсчитать количество этих чисел.
4. Составляя расписание уроков на понедельник для 7А класса, завуч хочет первым уроком поставить либо физику, либо алгебру, а вторым — либо русский язык, либо литературу, либо историю. Сколько существует вариантов составления расписания на первые два урока?

5. Чтобы попасть из города A в город B, нужно по дороге доехать до реки, а затем переправиться на другой ее берег. До реки можно доехать на мотоцикле, на автобусе, на автомобиле или дойти пешком. Через реку можно переправиться либо вплавь, либо переплыть на лодке, либо — на пароме. Сколько существует различных способов добраться из города A в город B?

6. У Светланы 3 юбки и 5 кофт, удачно сочетающихся по цвету. Сколько различных комбинаций из юбок и кофт имеется у Светланы?

7. На стол бросают 2 игральных тетраэдра (серый и белый), на гранях каждого из которых точками обозначены числа от 1 до 4 (рис. 23). Сколько различных пар чисел может появиться на гранях этих тетраэдров, соприкасающихся с поверхностью стола?

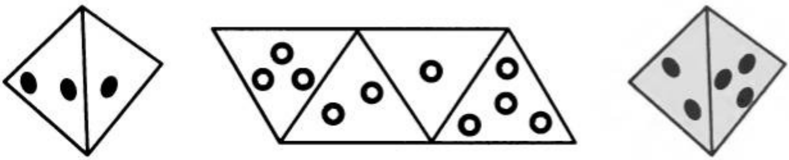


Рис. 23

8. В ларьке продается пять видов мороженого (не менее двух брикетов каждого вида). Оля и Таня покупают по одному брикету. Сколько существует вариантов такой покупки?

9. Мама решила сварить компот из фруктов двух видов. Сколько различных (по сочетанию видов фруктов) вариантов компотов может сварить мама, если у нее имеется 7 видов фруктов?

10. Из коробки, содержащей 8 мелков различных цветов, Гена и Таня берут по одному мелку. Сколько существует различных вариантов такого выбора двух мелков?

11. Сколько существует различных двузначных чисел, в записи которых можно использовать цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе: 1) могут повторяться; 2) должны быть различными?

12. Сколько существует различных двузначных чисел, в записи которых можно использовать цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в числе: 1) могут повторяться; 2) должны быть различными?

§ 4. Подсчет вариантов с помощью графов

Перебрать и подсчитать всевозможные комбинации из данных элементов несложно, когда их количество невелико. Однако уже при решении задачи 4 из § 2 таких комбинаций оказалось 27, и при переборе легко было упустить какую-нибудь из них.

Нередко подсчет вариантов облегчают *графы*. Так называют геометрические фигуры, состоящие из точек (их называют *вершинами*) и соединяющих их отрезков (называемых *ребрами* графа). При этом с помощью вершин изображают элементы некоторого множества (предметов, людей, числовых и буквенных кодов и т. п.), а с помощью ребер — определенные связи между этими элементами. Для удобства иллюстрации условия задачи с помощью графа его вершины-точки могут быть заменены, например, кругами или прямоугольниками, а ребра-отрезки — любыми линиями.

Примеры различных графов приведены на рисунке 24. Генеалогическое древо, изображенное на рисунке 25, также является примером графа.

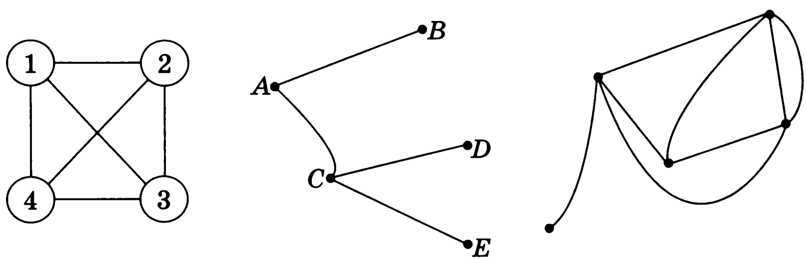


Рис. 24

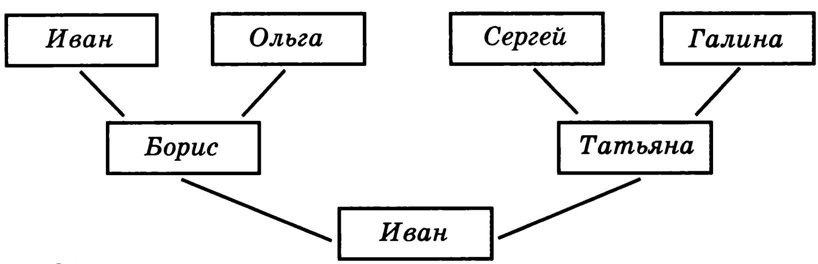


Рис. 25

1. Полный граф

Задача 1. Андрей, Борис, Виктор и Григорий играли в шахматы. Каждый сыграл с каждым по одной партии. Сколько партий было сыграно?

Решим задачу с помощью так называемого *полного графа* с четырьмя вершинами А, Б, В, Г (рис. 26), обозначенными по первым буквам имен каждого из 4 мальчиков. *В полном графе проводятся все возможные ребра.* В данном случае отрезки-ребра обозначают шахматные партии, сыгранные каждой парой мальчиков. Из рисунка видно, что граф имеет 6 ребер, значит, и партий было сыграно 6.

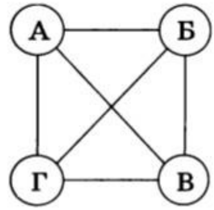


Рис. 26

Ответ. 6 партий.

Задача 2. Андрей, Борис, Виктор и Григорий после возвращения из спортивного лагеря подарили на память друг другу свои фотографии. Причем каждый мальчик подарил каждому по одной фотографии. Сколько всего фотографий было подарено?

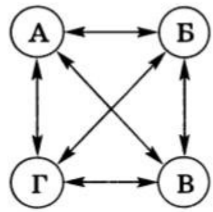


Рис. 27

I способ. С помощью стрелок на ребрах полного графа с вершинами А, Б, В и Г (рис. 27) показан процесс обмена фотографиями. Очевидно, стрелок в 2 раза больше, чем ребер, т. е. $6 \cdot 2 = 12$. Столько же было подарено и фотографий.

II способ. Каждый из четырех мальчиков подарил друзьям 3 фотографии, следовательно, всего было роздано $3 \cdot 4 = 12$ фотографий.

Ответ. 12 фотографий.

Задача 3. Сколько различных пар элементов (N), отличающихся лишь составом, можно образовать из n имеющихся различных элементов ($n > 2$)?

Решим задачу с помощью полного графа, имеющего n вершин. Каждое ребро этого графа определяет искомую пару элементов. Из каждой вершины выходят $(n-1)$ ребер. Число $(n-1) \cdot n$ в 2 раза больше, чем число ребер, так как при таком подсчете каждое ребро учитывается дважды. Следовательно, число искомых пар (ребер графа)

$$N = \frac{(n-1)n}{2}. \qquad (1)$$

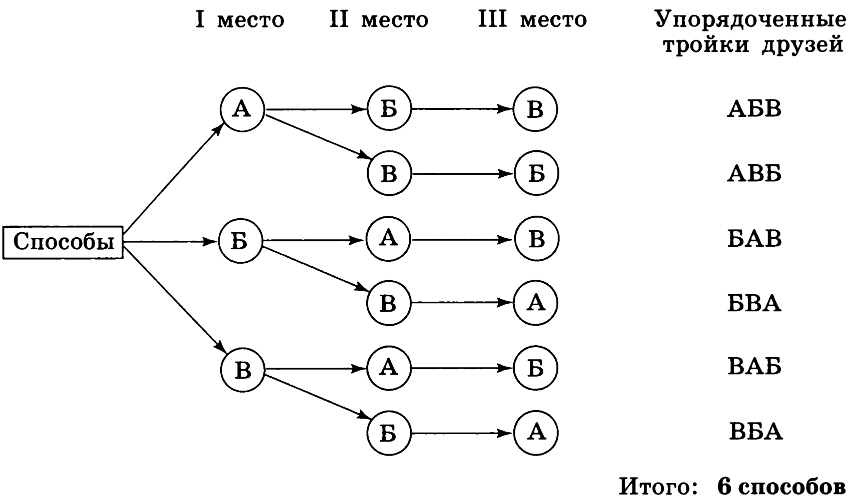
Ответ. $N = \frac{(n-1)n}{2}$.

2. Граф-дерево

В § 2 решалась задача о способах рассаживания троих друзей на трех местах во время футбольного матча. Рассмотрим составление всевозможных упорядоченных троек друзей с помощью графа, называемого *деревом* (за внешнее сходство с деревом).

Задача 4. Антон, Борис и Василий купили 3 билета на футбольный матч на 1, 2 и 3-е места первого ряда. Сколькими способами они могут занять имеющиеся три места?

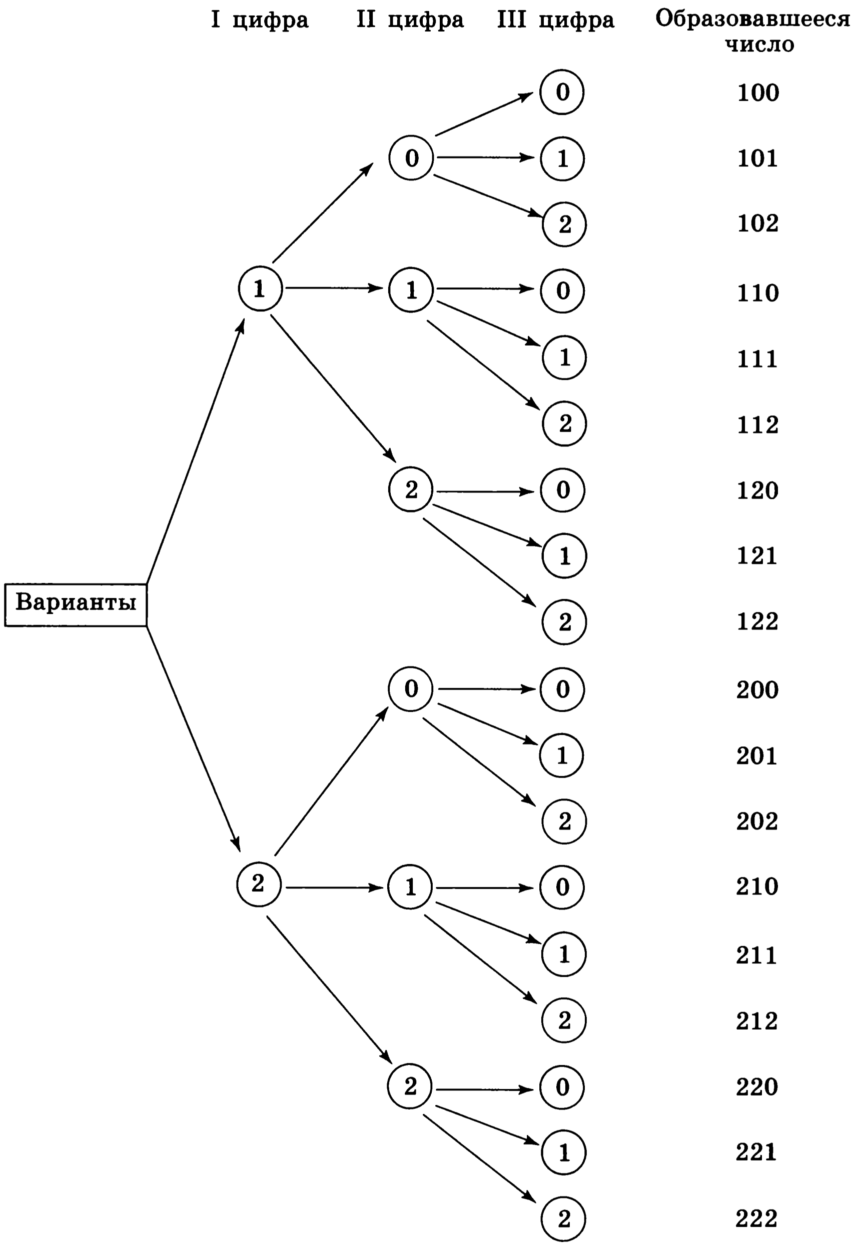
На 1-е место может сесть любой из троих друзей, на 2-е — любой из двоих оставшихся, а на 3-е — последний. Сказанное изобразим с помощью дерева, помещая в вершины графа первые буквы имен друзей А, Б и В:



Ответ. 6.

Задача 5. Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, если цифры в числе могут повторяться?

Первой цифрой составляемого трехзначного числа может быть либо 1, либо 2. Второй цифрой может быть любая из трех данных цифр; третьей — также любая из цифр 0, 1, 2. Изобразим сказанное с помощью дерева:



Итого: **18 чисел**

Ответ. 18. ◁

Ребра графа, являющегося деревом, иногда называют ветвями дерева, а само дерево — *деревом вариантов*. Вычерчивать дерево полезно, когда требуется записать все существующие комбинации элементов.

Дерево вариантов дает наглядное представление о том, как применяется *правило произведения* для подсчета комбинаций из большего, чем 2, числа элементов. Действительно, например, в задаче 5, согласно правилу произведения, первые две цифры числа можно было записать шестью способами ($2 \cdot 3 = 6$). Третью цифру к уже двум имеющимся можно было, согласно правилу произведения, приписать $(2 \cdot 3) \cdot 3 = 18$ способами, т. е. существует $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ всевозможных трехзначных чисел, записанных с помощью цифр 0, 1 и 2.

Задача 6. В меню столовой предложены на выбор 3 первых, 5 вторых и 4 третьих блюда. Сколько различных вариантов обедов, состоящих из одного первого, одного второго и одного третьего блюда, можно составить из предложенного меню?

▶ Согласно правилу произведения таких обедов можно составить $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$.

Ответ. 60 вариантов обедов. ◁

Упражнения

Упражнения **1—6** выполнить с помощью графов.

1. При встрече каждый из друзей пожал другому руку (каждый пожал каждому). Сколько рукопожатий было сделано, если друзей было: 1) трое; 2) четверо; 3) пятеро?

2. По окончании деловой встречи специалисты обменялись визитными карточками (каждый вручил свою карточку каждому). Сколько всего визитных карточек было роздано, если во встрече участвовали: 1) 3 человека; 2) 4 человека; 3) 5 человек?

3. Маше на день рождения подарили три букета цветов: из роз (р), астр (а) и гвоздик (г). В доме было две вазы: хрустальная (х) и керамическая (к). Маша пробовала устанавливать каждый букет в каждую вазу. Перечислить все полученные сочетания букета с вазой.

4. В каждую из трех ваз: хрустальную (х), керамическую (к) и стеклянную (с) — пробуют поставить по одному из двух имеющихся букетов цветов: из роз (р) и гвоздик (г). Перечислить все возможные варианты установки каждого букета в вазу.

5. Перечислить все возможные варианты обедов из трех блюд (одного первого, одного второго и одного третьего блюда), если в меню столовой имеются два первых блюда: щи (щ) и борщ (б); три вторых блюда: рыба (р), гуляш (г) и плов (п); два третьих: компот (к) и чай (ч).

6. Перечислить все возможные цветовые сочетания брюк, свитера и ботинок, если в гардеробе имеются брюки трех цветов: серые (с), бежевые (б) и зеленые (з); свитера двух расцветок: песочный (п) и малиновый (м); ботинки двух цветов: черные (ч) и коричневые (к).

7. Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр: 1) 1 и 2; 2) 0 и 1?

8. Сколько различных трехзначных чисел, в записи которых цифры могут повторяться, можно записать с помощью цифр: 1) 1, 2, 3, 4; 2) 0, 1, 2, 3?

9. Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 5, 6, 7, 8, 9 при условии, что цифры в числе: 1) могут повторяться; 2) должны быть различными?

10. Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 6, 7, 8, 9, 0 при условии, что цифры в числе: 1) могут повторяться; 2) должны быть различными?

---

11. Вася забыл вторую и последнюю цифры пятизначного номера телефона приятеля. Какое наибольшее число звонков предстоит сделать Васе, если он решил перепробовать комбинации всех забытых цифр, чтобы в результате дозвониться до приятеля?

12. Имеется 6 видов овощей. Решено приготовить салат из 3 видов. Сколько различных (по сочетанию видов овощей) вариантов салатов можно приготовить?

13. Сколько существует способов занять 1, 2 и 3-е места на чемпионате по футболу, в котором участвуют: 1) 10 команд; 2) 11 команд?

14. При игре в крестики-нолики на поле размером 3×3 клетки неопытный первый игрок делает 1-й ход: ставит крестик в любую из клеток; вторым ходом второй неопытный игрок ставит нолик в любую из оставшихся свободных клеток, затем 3-м ходом первый игрок ставит крестик и т. д. Сколько существует вариантов заполненных клеток после: 1) двух ходов; 2) трех ходов; 3) четырех ходов?

15. Завуч составляет расписание уроков. В пятницу в 7А классе должно быть 5 уроков, причем обязательно один сдвоенный урок — алгебра. Сколько различных вариантов расписания уроков может составить завуч на пятницу, если 3 оставшихся урока он комбинирует из литературы, истории и физики?

16. Имеется 7 книг, причем две из них одинаковые, а остальные книги отличаются от этих двух и различны между собой. Сколькими способами можно расставить эти книги на книжной полке при условии, что одинаковые книги в любой последовательности должны стоять рядом?

17. Сколько ребер имеет полный граф (каждая вершина соединена с каждой), если количество его вершин n, где: 1) $n=12$; 2) $n=37$?

18. Сколькими различными способами можно назначить двух ребят на дежурство по столовой, если в классе: 1) 24 учащихся; 2) 25 учащихся?

§ 5. Перестановки

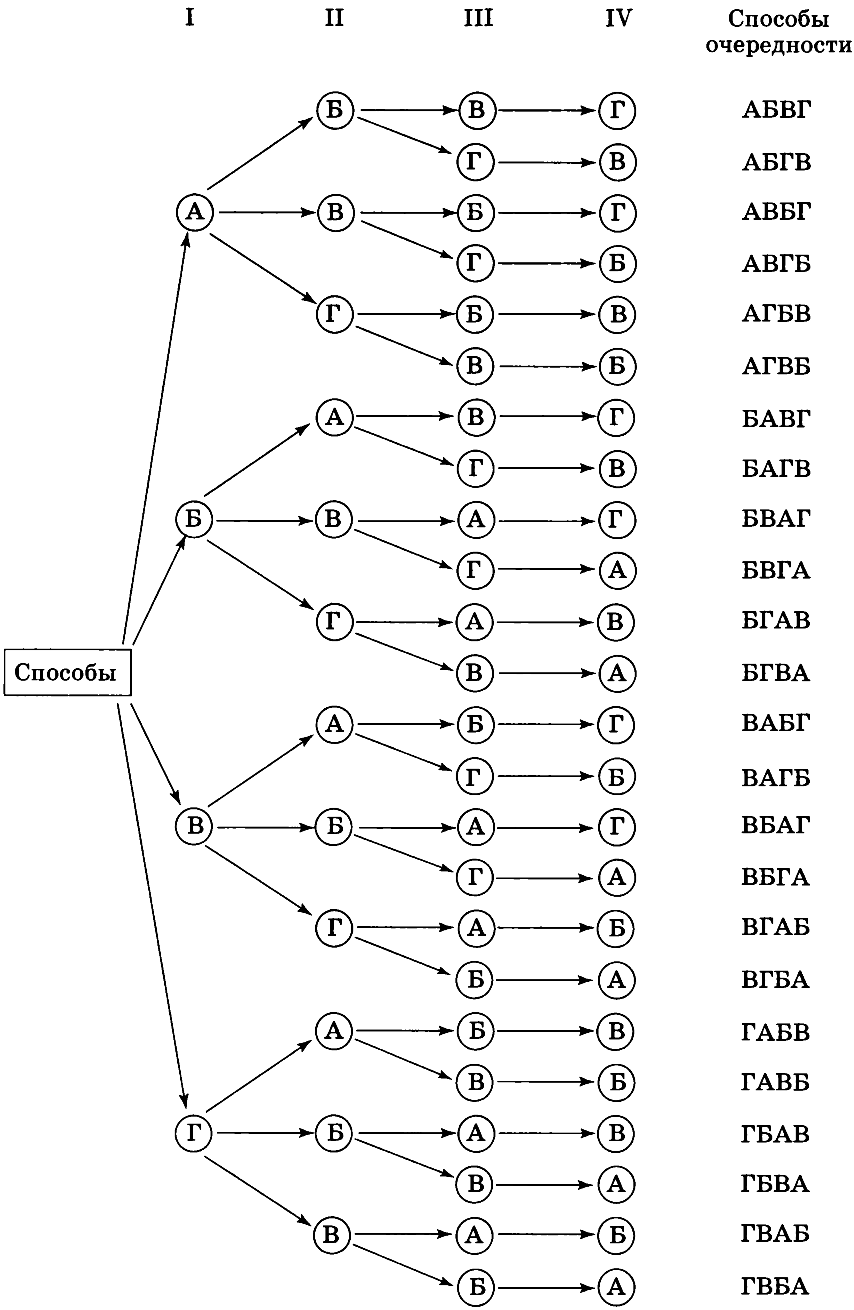
Задача 1. Семиклассники Анна, Борис, Виктор и Галина побежали на перемене к теннисному столу, за которым уже шла игра. Сколькими способами подбежавшие к столу четверо семиклассников могут занять очередь для игры в настольный теннис?

Первым (I) в очередь мог встать любой из семиклассников, вторым (II) — любой из оставшихся троих, третьим (III) — любой из оставшихся двоих и четвертым (IV) — семиклассник, подбежавший последним (см. схему на с. 26). По правилу произведения у четверых ребят существует $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способа занять очередь.

Ответ. 24 способами.

В задаче 1 были подсчитаны всевозможные комбинации из четырех элементов, отличающиеся друг от друга только порядком расположения в них элементов. Такие комбинации называются *перестановками* из четырех элементов.

Комбинации из n элементов, отличающиеся друг от друга только порядком расположения в них элементов, называются перестановками из n элементов.



Итого: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Число всевозможных перестановок из n элементов обозначают P_n (P — первая буква французского слова permutation — перестановка). Читается: «Число перестановок из эн элементов» или «Пэ из эн».

В задаче 1 было показано, что $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Пользуясь переместительным законом умножения, можно записать $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.

С помощью правила произведения можно обосновать, что

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

После применения переместительного закона умножения эту формулу можно переписать в виде

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n. \qquad (1)$$

Таким образом, *число перестановок из n элементов равно произведению всех натуральных чисел от 1 до n.*

Задача 2. Сколько различных пятизначных чисел, все цифры которых различны, можно записать с помощью цифр 4, 5, 6, 7 и 8?

▶ Задача сводится к подсчету числа перестановок из пяти элементов: $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Ответ. 120 различных чисел. ◁

Для сокращения записи произведения первых n натуральных чисел в математике используется символ $n!$ (читается: «Эн факториал»), т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, поэтому формулу (1) часто записывают в виде

$$\boldsymbol{P_n = n!}$$

В задаче 2 было показано, что $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Задача 3. Сколькими способами можно расставить на полке 8 книг, среди них 2 книги одного автора, которые при любых перестановках должны стоять рядом?

▶ Условно будем считать две книги одного автора единой книгой. Тогда количество способов расстановки условных семи книг на полке будет равно числу перестановок из 7 элементов:

$$P_7 = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}_{5!} \cdot 6 \cdot 7 = 120 \cdot 42 = 5040.$$

Но в каждой такой перестановке книги одного автора можно поменять местами, поэтому общее число способов расстановки книг на полке будет в 2 раза больше, т. е. $5040 \cdot 2 = 10\,080$.

Ответ. 10 080 способами. ◁

Задача 4. Вычислить: 1) $\frac{13!}{11!}$; 2) $\frac{6! \cdot 14}{8!}$.

▶ 1) $\frac{13!}{11!} = \frac{11! \cdot 12 \cdot 13}{11!} = 12 \cdot 13 = 156$;

2) $\frac{6! \cdot 14}{8!} = \frac{6! \cdot 14}{6! \cdot 7 \cdot 8} = \frac{1}{4}$.

Ответ. 1) 156; 2) $\frac{1}{4}$. ◁

Упражнения

1. Сколькими способами могут встать в очередь в билетную кассу: 1) 3 человека; 2) 5 человек?

2. Сколько существует вариантов рассаживания вокруг стола: 1) 6 гостей на 6 стульях; 2) 7 гостей на 7 стульях?

3. Сколькими способами можно с помощью букв K, L, M, N обозначить вершины четырехугольника?

4. Четыре друга купили билеты в кино: на 1-е и 2-е места в первом ряду и на 1-е и 2-е места во втором ряду. Сколькими способами друзья могут занять эти 4 места в кинотеатре?

5. Сколько различных правильных (с точки зрения русского языка) фраз можно составить, изменяя порядок слов в предложении: 1) «Я пошел гулять»; 2) «Во дворе гуляет кошка»?

6. Разложить на простые множители числа 30 и 210. Сколькими способами можно записать в виде произведения простых множителей число: 1) 30; 2) 210?

7. Сколько различных четных четырехзначных чисел с неповторяющимися цифрами можно записать, используя цифры 1, 2, 3, 5?

8. Сколько различных нечетных пятизначных чисел, в которых нет одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2, 4, 6, 8?

9. Вычислить: 1) $6! - 5!$; 2) $4! \cdot 2!$; 3) $\frac{4!}{2!}$; 4) $\frac{8!}{6!}$; 5) $\frac{4!}{7!}$; 6) $\frac{5!}{8!}$.

10. Решить уравнение: 1) $2P_x = 12$; 2) $\frac{P_x}{3} = 8$.

11. Сколько различных шестизначных чисел с неповторяющимися цифрами можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если: 1) число должно начинаться с 56; 2) цифры 5 и 6 в числе должны стоять рядом?

12. Сколько различных четных четырехзначных чисел, в записи которых нет одинаковых цифр, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?

13. Сколько различных четных пятизначных чисел, все цифры которых различны, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5?

14. Сколькими способами можно записать в виде произведения простых множителей число: 1) 12; 2) 24; 3) 120?

15. Сколькими способами можно закрасить 6 клеток так, чтобы 2 клетки были закрашены красным цветом, а 4 другие — белым, черным, зеленым и синим (каждым цветом — одна клетка)?

16. Сколькими способами можно закрасить 6 клеток таким образом, чтобы 3 клетки были красными, а 3 оставшиеся были закрашены (каждая своим цветом) белым, черным или зеленым?

17. Вычислить: 1) $\frac{5 \cdot 6! + 6 \cdot 5!}{6 \cdot 6!}$; 2) $\frac{7! - 8! + 6!}{8 \cdot 6!}$.

§ 6. Разбиение на две группы. Выдвижение гипотез

Во дворе стояли 2 скамейки. Аня (А) и Белла (Б) первыми вышли гулять и решили подсчитать, сколькими способами они могут сесть на эти скамейки (порядок рассаживания на скамейки не учитывался). Таких способов 4 (см. табл).

1-я скамейка	А, —	—, Б	А, Б	—, —
2-я скамейка	—, Б	А, —	—, —	А, Б

Затем к девочкам присоединилась Валентина (В), и ту же задачу с рассаживанием на двух скамейках девочки решили уже для троих (см. табл.). Оказалось, что способов 8.

1-я скамейка	А, –, –	–, Б, В	–, Б, –	А, –, В	–, –, В	А, Б, –	А, Б, В	–, –, –
2-я скамейка	–, Б, В	А, –, –	А, –, В	–, Б, –	А, Б, –	–, –, В	–, –, –	А, Б, В

Когда во двор вышла Галя (Г), то Аня высказала догадку (предположение), что если они захотят подсчитать число способов, которыми они вчетвером могут занять две скамейки, то способов будет 16. Анна сказала, что когда она была во дворе одна, то от скуки посидела сначала на одной скамье, а затем на другой, т. е. число способов рассаживания для нее одной оказалось равным 2. Теперь она заметила закономерность: число способов распределения на две группы для одного человека равно $2=2^1$, для двух человек равно $4=2^2$, для трех равно $8=2^3$, поэтому для четырех, скорее всего, будет равно $2^4=16$. Не тратя времени на рассаживание, Аня составила таблицу:

1-я скамейка	А, –, –, –	–, Б, В, Г	–, Б, –, –	А, –, В, Г	–, –, В, –	А, Б, –, Г	–, –, –, Г	А, Б, В, –
2-я скамейка	–, Б, В, Г	А, –, –, –	А, –, В, Г	–, Б, –, –	А, Б, –, Г	–, –, В, –	А, Б, В, –	–, –, –, Г

Продолжение

А, Б, –, –	–, –, В, Г	А, –, В, –	–, Б, –, Г	А, –, –, Г	–, Б, В, –	А, Б, В, Г	–, –, –, –
–, –, В, Г	А, Б, –, –	–, Б, –, Г	А, –, В, –	–, Б, В, –	А, –, –, Г	–, –, –, –	А, Б, В, Г

На следующий день Аня спросила у учителя математики, верно ли ее предположение о том, что для любого количества элементов n число всевозможных способов разбиения его на две группы равно 2^n. Учитель похвалил Аню за наблюдательность и сказал, что можно доказать справедливость выдвинутого девочкой предположения — *гипотезы*.

● Так как каждое разбиение n элементов на две группы однозначно определяется составом элементов в одной из групп (не попавшие в первую группу элементы авто-

$$\overbrace{\boxed{1\text{-я}}\boxed{2\text{-я}}\boxed{3\text{-я}}\boxed{\;\bullet\bullet\bullet\;}\boxed{n\text{-я}}}^{n \text{ ячеек}}$$

Рис. 28

матически образуют вторую группу), подсчитаем все варианты составления одной группы. Будем условно считать, что в этой группе для каждого из n элементов есть своя ячейка (рис. 28), которую соответствующий элемент может занять, а может и не занять. Таким образом, вариантов «занять» или «не занять» каждым элементом свою ячейку 2. Согласно правилу произведения комбинаций (вариантов) из «занятых» и «незанятых» n ячеек будет $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ множителей}} = 2^n$. ○

Задача. Имеется 6 карандашей шести разных цветов. Сколькими способами эти карандаши могут быть распределены между двумя школьниками?

▶ Задача сводится к подсчету числа всевозможных способов разбиения шести различных элементов (карандашей) на две группы. Это число равно $2^6 = 64$.

Ответ. 64 способами. ◁

Услышав разговор Ани с учителем, Дима высказал предположение, что при любом натуральном n значение выражения n^2+n+1 — простое число. В подтверждение своей гипотезы Дима показал, что $n^2+n+1=3$ при $n=1$, $n^2+n+1=7$ при $n=2$, $n^2+n+1=13$ при $n=3$, а числа 3, 7 и 13 простые.

Учитель сказал, что гипотеза Димы не верна, так как, например, уже при $n=4$ число $n^2+n+1=4^2+4+1=21$ является составным. И добавил, что для опровержения гипотезы достаточно привести один опровергающий ее пример.

Упражнения

1. Перечислить все возможные варианты разложения по двум вазам одного яблока (я) и одной груши (г).
2. Перечислить все возможные варианты разложения по двум вазам одного яблока (я), одной груши (г) и одного апельсина (а).
3. Каждая из 5 подруг собирается вечером пойти либо в кино, либо в театр. Сколькими различными способами эти 5 подруг смогли бы провести вечер?
4. В списке группы для изучения иностранного языка 12 человек. Сколько существует вариантов присутствия (отсутствия) этих людей на занятии?
5. Доказать или опровергнуть гипотезу:
   1) все люди — сестры;
   2) все треугольники прямоугольные;
   3) число, предпоследняя цифра которого 2, является четным;

4) сумма двух любых нечетных чисел есть число четное;
5) квадрат суммы двух чисел равен сумме квадратов этих чисел, сложенной с их удвоенным произведением;
6) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
7) Иванов Саша и Иванов Дима — братья;
8) для любого натурального n число n^2+n+41 простое.

---

6. В азбуке Морзе, которой пользуются для телефонных сообщений, два знака — точка и тире. Каждая буква или цифра кодируется определенной комбинацией (последовательностью) точек и тире, но не более чем пятью знаками подряд (см. примеры кодирования на рисунке 29). Какое максимальное число букв, цифр или других знаков можно закодировать с помощью азбуки Морзе?

Рис. 29

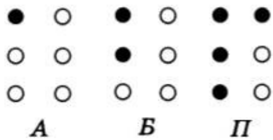


Рис. 30 ▸

7. Азбука для слепых, которую придумал французский тифлопедагог Луи Брайль (1809—1852),— это рельефно-точечный шрифт, который легко осязается. В его основе — комбинации из 6 точек (см. рисунок 30, на котором выпуклые «точки» закрашены черным цветом). Этими точками кодируются буквы, цифры, ноты и т. п. Сколько различных символов можно закодировать азбукой Брайля?

8. Высказать гипотезу о числе всевозможных разбиений n элементов на 3 группы.

Упражнения к главе I

1. Найти n-е по порядку квадратное число, если:
1) $n=11$; 2) $n=30$.

2. Найти n-е по порядку треугольное число, если:
1) $n=15$; 2) $n=19$.

3. Завершить составление магических квадратов на рисунке 31.

4. Завершить составление латинских квадратов на рисунке 32.

5. С помощью цифр 8 и 9 записать всевозможные двузначные числа, в которых цифры: 1) должны быть разными; 2) могут повторяться.

8		

		8

Рис. 31

2		
	1	

		1
	3	

Рис. 32

6. С помощью цифр 7, 8 и 9 записать всевозможные двузначные числа, в которых цифры: 1) должны быть разными; 2) могут повторяться.

7. С помощью цифр 7, 8 и 9 записать всевозможные трехзначные числа при условии, что цифры в числе должны быть различными.

8. Перечислить все двузначные числа, в записи которых используются только цифры 8, 9 и 0, если: 1) одинаковых цифр в числах не должно быть; 2) цифры в числах могут повторяться.

9. Перечислить все трехзначные числа, в записи которых встречаются только цифры 8 и 9.

10. Анна (А), Белла (Б) и Вера (В) купили билеты в кинотеатр на 1, 2 и 3-е места первого ряда. Перечислить все возможные способы, которыми девочки могут занять эти три места.

11. У лесника 3 собаки: Астра (А), Вега (В) и Гриф (Г). На охоту лесник решил пойти с двумя собаками. Перечислить все варианты выбора лесником пары собак.

12. Из трех стаканов сока — ананасового (а), брусничного (б) и виноградного (в) — Иван решил последовательно выпить два. Перечислить все варианты, которыми это можно сделать.

13. Сколькими способами могут быть заняты первое, второе и третье места (по одному человеку на место) на соревнованиях, в которых участвуют: 1) 5 человек; 2) 6 человек?

---

14. Сколько существует способов выбрать троих ребят из четверых желающих дежурить по столовой?

15. Найти значение выражения: 1) P_4+P_3; 2) P_6-P_5; 3) $\frac{P_8}{P_7}$; 4) $\frac{P_{12}}{P_{10}}$; 5) $\frac{P_{n+1}}{P_n}$.

16. Сколькими способами 4 различные монеты можно разложить по двум карманам?

Глава II
Случайные события

§ 7. События

1. Невозможные, достоверные и случайные события

В жизни под событием понимают любое явление, которое происходит или не происходит. Событиями являются и результаты испытаний (опытов), наблюдений и измерений. Все события можно подразделить на *невозможные, достоверные* и *случайные*.

Невозможным называют событие, которое в данных условиях произойти не может.

Приведем примеры невозможных событий:

1) вода в реке замерзла при температуре +25 °С;

2) при бросании игральной кости (т. е. кубика, на гранях которого отмечены очки от 1 до 6) появилось 7 очков.

Достоверным называют событие, которое в данных условиях обязательно произойдет.

Например, достоверными являются события:

1) после четверга наступила пятница;

2) при бросании игральной кости выпало число очков, меньшее семи.

Случайным называют событие, которое в данных условиях может произойти, а может и не произойти.

Случайными являются, например, следующие события:

1) при телефонном звонке абонент оказался занят;

2) при бросании игральной кости выпало 2 очка.

2. Совместные и несовместные события

Два события, которые в данных условиях могут происходить одновременно, называют *совместными*, а те, которые не могут происходить одновременно,— *несовместными*.

Например, события «пошел дождь» и «наступило утро» являются совместными, а события «наступило утро» и «наступила ночь» — несовместными.

Задача 1. Среди событий, связанных с одним бросанием игральной кости: 1) выпало 2 очка; 2) выпало 5 очков; 3) выпало более 2 очков; 4) выпало число очков, кратное двум,— найти пары совместных и пары несовместных событий.

Число всевозможных пар событий, составленных из четырех имеющихся, равно 6 (см. § 4). Из них совместными будут три пары: 1-е и 4-е (число 2 четное); 2-е и 3-е (5 очков больше, чем 2); 3-е и 4-е (например, 4 очка). Несовместными будут события: 1-е и 2-е (одновременно не могут выпасть 2 разных числа); 1-е и 3-е (более 2 очков, т. е. 3, 4, 5 или 6 одновременно с 2 очками появиться не могут); 2-е и 4-е (число 5 не кратно 2).

3. Равновозможные события

Рассмотрим группы событий:

1) «появление орла» и «появление решки» при одном бросании монеты (рис. 33);

2) «появление 1 очка», «появление 2 очков», ..., «появление 6 очков» при одном бросании игральной кости;

3) «падение бутерброда маслом вверх» и «падение бутерброда маслом вниз»;

4) «изъятие из набора домино дубля» и «изъятие из набора домино костяшки с разными очками».

орел

решка

Рис. 33

В примерах 1 и 2 нет оснований полагать, что в наступлении одного из событий есть какое-то преимущество (если монета и кубик правильные). Такие события называются *равновозможными*. Часто равновозможность событий удается установить из соображений симметрии.

Примеры 3 и 4 демонстрируют образцы *неравновозможных* событий. Действительно, бутерброд чаще падает маслом вниз из-за того, что после намазывания хлеба маслом центр тяжести бутерброда смещается из центра его симметрии в сторону слоя масла. Дублей в наборе домино (см. пример 4) всего 7, а остальных костяшек 21.

Упражнения

В упражнениях **1—6** описаны условия и происходящие в них события. Для каждого из этих событий устно определить, каким оно является: невозможным, достоверным или случайным.

1. Из 25 учащихся класса двое справляют день рождения: 1) 30 января; 2) 30 февраля.

2. Случайным образом открывается учебник литературы и находится второе слово на левой странице. Это слово начинается: 1) с буквы К; 2) с буквы Ь.

3. Из списка журнала VIII класса (в котором есть и девочки, и мальчики) случайным образом выбран один ученик: 1) это мальчик; 2) выбранному ученику 14 лет; 3) выбранному ученику 14 месяцев; 4) этому ученику больше двух лет.

4. Сегодня в Сочи барометр показывает нормальное атмосферное давление. При этом: 1) вода в кастрюле закипела при $t = 80$ °C; 2) когда температура упала до -5 °C, вода в луже замерзла.

5. Измерены длины сторон треугольника. Оказалось, что длина каждой стороны меньше суммы длин двух других сторон.

6. Бросают две игральные кости: 1) на первой кости выпало 3 очка, а на второй — 5 очков; 2) сумма выпавших на двух костях очков равна 1; 3) сумма выпавших на двух костях очков равна 13; 4) на обеих костях выпало по 3 очка; 5) сумма очков на двух костях меньше 15.

В упражнениях **7—11** среди данных пар событий указать, какие являются совместными, а какие — несовместными.

7. В сыгранной Катей и Славой партии в шахматы: 1) Катя выиграла; Слава проиграл; 2) Катя проиграла; Слава проиграл.

8. Брошена игральная кость. На верхней грани оказалось: 1) 6 очков; 5 очков; 2) 6 очков; четное число очков.

9. Из набора домино (рис. 34) вынута одна костяшка, на ней: 1) одно число очков больше 3, другое число 5; 2) одно число не меньше 6, другое число не больше 6; 3) одно число 2, сумма обоих чисел равна 9; 4) оба числа больше 3, сумма чисел равна 7.

10. Из событий: 1) «идет дождь»; 2) «на небе нет ни облачка»; 3) «наступило лето» — составить всевозможные па-

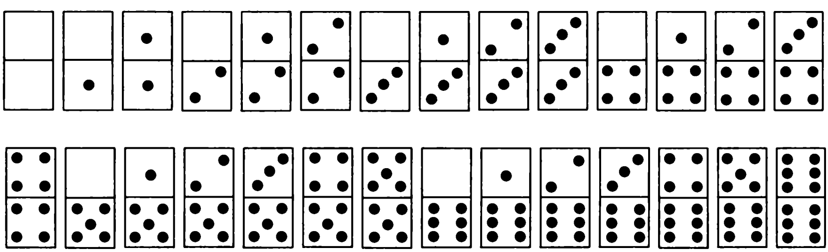


Рис. 34

ры и выявить среди них пары совместных и пары несовместных событий.

11. Из событий: 1) «наступило утро»; 2) «сегодня по расписанию 6 уроков»; 3) «сегодня первое января»; 4) «температура воздуха в Салехарде +20 °С» — составить всевозможные пары и выявить среди них пары совместных и пары несовместных событий.

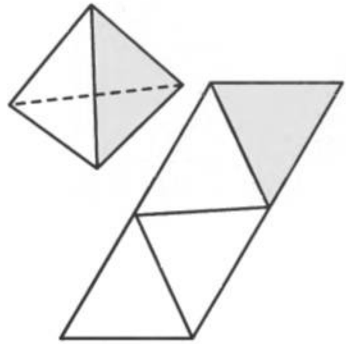


Рис. 35

12. Имеется правильная треугольная пирамида — тетраэдр (рис. 35). Одна из ее граней серая, а 3 другие белые. Тетраэдр бросают на стол и наблюдают за гранью, которой он соприкасается со столом. Являются ли равновозможными события «тетраэдр упал на серую грань» и «тетраэдр упал на белую грань»?

13. Бросается игральный кубик, у которого: 1) 2 грани; 2) 3 грани — окрашены в красный цвет, а остальные — в желтый. Являются ли равновозможными события «выпала желтая грань» и «выпала красная грань»?

---

14. Из полной колоды в 36 карт (рис. 36) наугад вынимается одна карта. Являются ли равновозможными события:

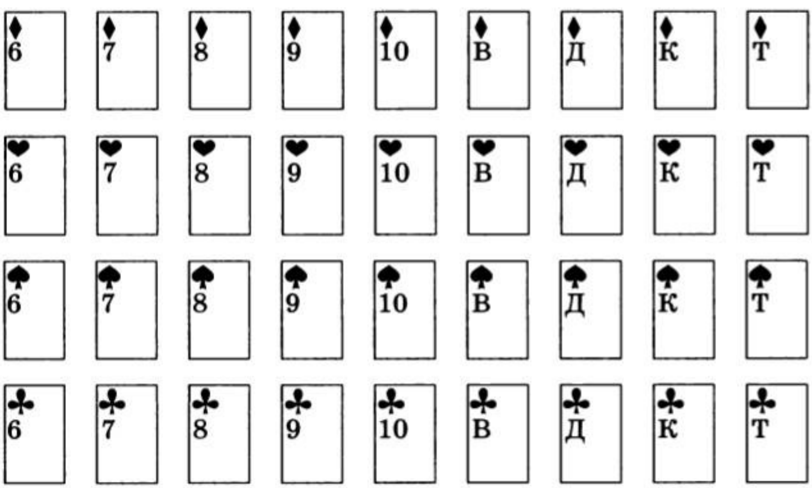


Рис. 36

1) «вынута карта красной масти» и «вынута карта черной масти»;
2) «вынут король» и «вынута дама»;
3) «вынута карта бубновой масти» и «вынута карта червовой масти»;
4) «вынута карта пиковой масти» и «вынута карта красной масти»;
5) «вынута шестерка треф» и «вынута дама пик»?

15. Из полной колоды карт вынимается одна карта. Выяснить, являются совместными или несовместными события:
1) «вынута карта красной масти» и «вынут валет»;
2) «вынут король» и «вынут туз».

§ 8. Вероятность события

Встречаясь в жизни с различными событиями, мы часто даем оценку степени их достоверности. При этом произносим, например, такие слова:

«Это невероятно!» — говорим о невозможном событии, например о том, что вода в холодильнике закипела.

«Маловероятно, что сегодня будет дождь»,— говорим, глядя на безоблачное небо летним утром.

«Наверняка это случится!», «Я уверен, что это произойдет!» — говорим, например, о предполагаемой двойке за контрольную работу, если изучаемая тема не была усвоена.

«Шансы равны», «Один к одному» или «Шансы пятьдесят на пятьдесят» — говорим, например, о возможности победы в соревнованиях двух одинаково подготовленных спортсменов или когда делаем ставку на орла или решку при подбрасывании монеты.

Вопрос о возможности *измерения степени достоверности* наступления какого-либо события задавали себе еще в XVII в. французские ученые Блез Паскаль (1623—1662) и Пьер Ферма (1601—1665). Наблюдая за игрой в кости, Паскаль высказал идею измерения степени уверенности в выигрыше (шансы выигрыша) некоторым числом. Действительно, рассуждал Паскаль, когда игрок бросает игральную кость, он не знает, какое число очков выпадет. Но он знает, что каждое из чисел 1, 2, 3, 4, 5 и 6 имеет одинаковую долю успеха (равные шансы) в своем появлении. Игрок также знает, что появление одного из этих чисел в каждом *испытании* (броске) — событие достоверное. Если *принять возможность наступления достоверного события за* 1, то возможность появления, например, шестерки (равно как и любого другого числа очков) в 6 раз меньше, т. е. равна $\frac{1}{6}$.

Долю успеха того или иного события математики стали называть *вероятностью* этого события и обозначать буквой P (по первой букве латинского слова *probabilitas* — вероятность).

Если буквой A обозначить событие «выпало 6 очков» при одном бросании игральной кости, то вероятность события A обозначают $P(A)$ и записывают $P(A)=\frac{1}{6}$ (читается: «Пэ от A равно одной шестой» или «Вероятность события A равна одной шестой»).

Задача 1. Поверхность рулетки (ее вид сверху изображен на рисунке 37) разделена диаметрами на 4 равные части. Найти вероятность того, что раскрученная стрелка рулетки остановится на секторе 3.

▶ Так как площади секторов поверхности рулетки одинаковы, то в одном испытании с раскручиванием стрелки существуют 4 равновозможных события (*исхода испытания*): она остановится: 1) на секторе 1; 2) на секторе 2; 3) на секторе 3; 4) на секторе 4.

Достоверное событие — «стрелка остановится на каком-либо из секторов». Вероятность наступления достоверного события равна 1, а вероятность события A — «стрелка остановится на секторе 3», в 4 раза меньше, т. е. $P(A)=\frac{1}{4}$.

Ответ. $\frac{1}{4}$. ◁

Помимо рассмотренных выше *элементарных событий*, можно изучать и более сложные события. Например, такие: «выпадение четного числа очков (2, 4 или 6) при одном бросании игральной кости»; «остановка стрелки рулетки не на секторе 2» и т. д.

Рассмотрим событие A — «выпало четное число очков», в результате одного бросания игральной кости. Это событие наступает в 3 случаях (исходах) — когда выпадает или 2, или 4, или 6 очков. Говорят, что это *благоприятствующие* событию A исходы. Поскольку 3 благоприятствующих исхода составляют половину от *всех возможных* исходов испытания (их 6), то вероятность событий A равна:

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

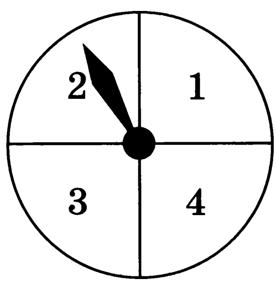


Рис. 37

Если в некотором испытании существует n равновозможных попарно несовместных исхода и m из них благоприятствуют событию A, то *вероятностью наступления события A* называют соотношение $\frac{m}{n}$ и записывают

$$P(A)=\frac{m}{n}. \tag{1}$$

Задача 2. Найти вероятность появления при одном бросании игральной кости числа очков, большего 4.

Событию A — «появлению числа очков, большего 4», благоприятствуют 2 исхода (появление 5 и появление 6 очков), т. е. $m=2$. Число всех равновозможных исходов $n=6$, поэтому $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Ответ. $\frac{1}{3}$.

Задача 3. Поверхность рулетки разделена на 8 равных секторов. Найти вероятность того, что после раскручивания стрелка рулетки остановится на закрашенной части рулетки (рис. 38).

Существует 8 равновозможных исходов испытания: стрелка остановится на секторе 1, на секторе 2, ..., на секторе 8, т. е. $n=8$. В закрашенную часть рулетки попадают 3 сектора (4, 5 и 6-й), т. е. число благоприятствующих исходов $m=3$. Тогда $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{8}$. Ответ. $\frac{3}{8}$.

О вероятностях наступления достоверных, невозможных и случайных событий на основании формулы (1) можно рассуждать следующим образом:

Если событие A достоверное, то ему благоприятствуют все возможные исходы испытания, т. е. $m=n$. Тогда $P(A)=\frac{m}{n}=1$.

Если событие A невозможное, то не существует исходов, благоприятствующих его появлению, т. е. $m=0$. Тогда $P(A)=\frac{0}{n}=0$.

Если событие A случайное, то число m благоприятствующих его появлению исходов удовлетворяет условию $0<m<n$. Тогда $0<P(A)=\frac{m}{n}<1$.

Таким образом, для вероятности $P(A)$ любого события A справедливы неравенства $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

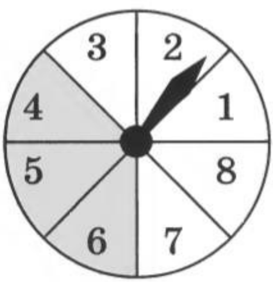


Рис. 38

Упражнения

1. Перечислить все элементарные равновозможные события, которые могут произойти в результате: 1) подбрасывания монеты; 2) подбрасывания игрального кубика; 3) подбрасывания тетраэдра с гранями, занумерованными числами 1, 2, 3, 4; 4) раскручивания стрелки рулетки, поверхность которой разделена на 5 одинаковых секторов, обозначенных буквами A, B, C, D и E.

2. Заполнить таблицу (с. 42).

3. В ящике находятся 2 белых и 3 черных шара. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар: 1) белый; 2) черный; 3) зеленый; 4) белый или черный?

4. В ящике находятся 2 белых, 3 черных, 4 красных шара. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что этот шар: 1) белый; 2) черный; 3) красный; 4) не белый; 5) не черный; 6) не красный?

5. На одинаковых карточках написаны числа от 1 до 10 (на каждой карточке — одно число). Карточки положили на стол, перевернули числами вниз и перемешали. Какова вероятность того, что на вынутой карточке окажется число: 1) 7; 2) четное; 3) кратное 3; 4) кратное 4; 5) делящееся на 5; 6) простое?

6. Таня забыла последнюю цифру номера телефона знакомой девочки и набрала ее наугад. Какова вероятность того, что Таня попала к своей знакомой?

7. В лотерее 1000 билетов, среди которых 20 выигрышных. Приобретается один билет. Какова вероятность того, что этот билет: 1) выигрышный; 2) невыигрышный?

8. Студент при подготовке к экзамену не успел выучить один из тех 25 билетов, которые будут предложены на экзамене. Какова вероятность того, что студенту достанется на экзамене выученный билет?

9. Допустим, что 5 раз подбрасывалась монета и каждый раз выпадал орел. Какова вероятность того, что при новом броске выпадет орел?

---

10. Из колоды карт (36 листов) наугад вынимается одна карта. Какова вероятность того, что эта карта: 1) шестерка треф; 2) семерка; 3) король красной масти; 4) карта бубновой масти с числом; 5) карта червовой масти с четным числом?

№ задания	Испытание	Число всех элементарных равновозможных событий — исходов испытания (n)	Изучаемое событие A	Число исходов, благоприятствующих событию A (m)	Вероятность события A $\left(P(A)=\frac{m}{n}\right)$
1	Подбрасывание игрального кубика		Выпавшее число очков нечетно		
2	Подбрасывание игрального кубика		Выпавшее число очков кратно трем		
3	Изъятие из полного набора домино одной костяшки		Изъята костяшка с очками 2 и 6		
4	Изъятие из полного набора домино одной костяшки		Изъят дубль		
5	Раскручивание стрелки рулетки, разделенной на 8 равных секторов, занумерованных числами от 1 до 8		Остановка стрелки на секторе с номером, кратным 4		
6	Раскручивание стрелки рулетки, разделенной на 8 равных секторов, занумерованных числами от 1 до 8		Остановка стрелки на секторе, номер которого не больше 6		

11. Деревянный окрашенный кубик 3×3 распилили на 27 одинаковых кубиков 1×1 (рис. 39). Кубики перемешали и выбрали наугад один из них. Найти вероятность события:
1) A — окрашены 3 грани;
2) B — окрашенными оказались 2 грани;
3) C — окрашена только одна грань;
4) D — нет ни одной окрашенной грани.

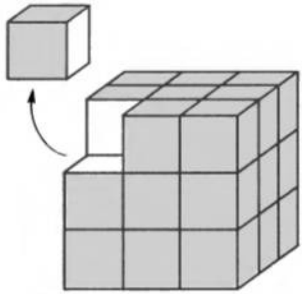


Рис. 39

§ 9. Решение вероятностных задач с помощью комбинаторики

Задача 1. Брошены две монеты. Какова вероятность того, что появятся: 1) два орла; 2) орел и решка?

Составим таблицу вариантов, позволяющую определить все возможные исходы в результате бросания двух монет. Появление орла в таблице обозначено буквой О, а появление решки — буквой Р.

1-я монета	2-я монета	
	О	Р
О	ОО	ОР
Р	РО	РР

Из таблицы видно, что число возможных исходов в испытании $n = 2 \cdot 2 = 4$.

1) Событию A — появлению двух орлов благоприятствует один исход (ОО), т. е. $m = 1$, поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4}$.

2) Событию B — появлению орла и решки благоприятствуют 2 исхода (ОР и РО), т. е. $m = 2$. Тогда $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Ответ. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$.

Задача 2. Брошены две игральные кости: одна белого, другая красного цвета. Какова вероятность того, что: 1) на белой кости выпадет 6 очков, а на красной — нечетное число очков; 2) на одной кости выпадет 6 очков, а на другой — нечетное число очков?

Составим таблицу возможных исходов бросания двух игральных костей. Число возможных исходов $n=6\cdot6=36$.

Белая кость	Красная кость					
	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

1) Исходы, благоприятствующие событию A,— появлению на белой кости 6 очков, на красной — нечетного числа очков, выделены в последней строке таблицы. Их 3, т. е. $m=3$. Таким образом, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

2) Исходы, благоприятствующие событию B — появлению на одной кости 6 очков, а на другой — нечетного числа очков, выделены в таблице исходов (к трем исходам, рассмотренным в предыдущем задании, добавляются еще три за счет появления 6 очков на второй кости и нечетного числа очков на первой). Таким образом, $m=6$, и, следовательно, $P(B)=\frac{m}{n}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

Ответ. 1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{1}{6}$.

Задача 3. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на двух брошенных костях, равна 5?

Общее число исходов испытания, как и в задаче 2, $n=36$. Выпишем из последней таблицы все исходы, благоприятствующие интересующему нас событию A,— сумма очков на двух костях равна 5:

14; 23; 32; 41.

Таким образом, $m=4$ и $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

Ответ. $\frac{1}{9}$.

Задача 4. В ящике имеется 3 одинаковых по размеру кубика: красный (к), черный (ч) и белый (б). Вытаскивая их наугад, кладем 3 кубика на стол последовательно один за другим. Какова вероятность того, что появится последовательность кубиков «ч б к»?

Общее число n исходов расстановки в ряд вынутых из ящика 3 кубиков равно числу перестановок из 3 элементов: $n = P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ (см. на рисунке 40 дерево исходов). Только один из этих исходов является благоприятствующим событию «ч б к», т. е. $m = 1$. Таким образом, вероятность интересующего нас события $P = \frac{1}{6}$.

Ответ. $\frac{1}{6}$.

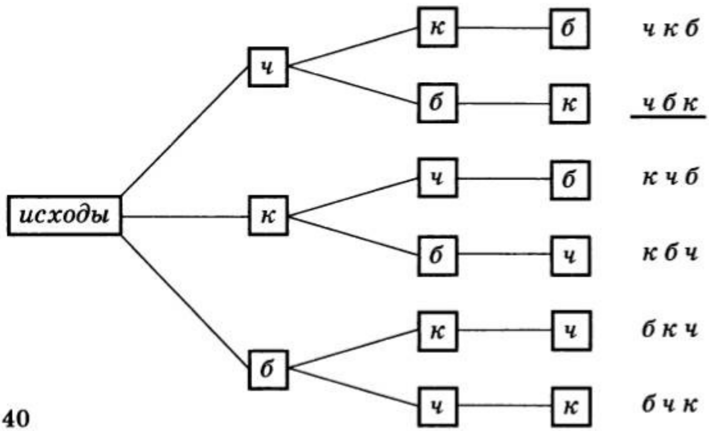


Рис. 40

Задача 5. В ящике имеется 3 одинаковых по размеру кубика: два черных ($ч_1$ и $ч_2$) и один красный (к). Вытаскивая кубики наугад один за другим, их ставят последовательно на стол. Какова вероятность того, что сначала будут вынуты два черных кубика, а последним — красный?

Общее число исходов, как и в предыдущей задаче, равно 6 (см. рисунок 41 с деревом исходов). Однако благоприятствующими рассматриваемому событию будут 2 исхода: «$ч_1$ $ч_2$ к» и «$ч_2$ $ч_1$ к», поэтому вероятность изучаемого события равна $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Ответ. $\frac{1}{3}$.

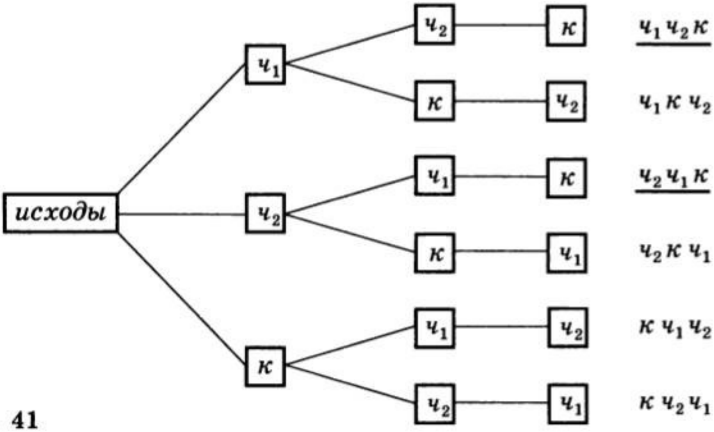


Рис. 41

Задача 6. В коробке лежат 2 белых и 3 черных шара. Наугад вынимают одновременно 2 шара. Найти вероятность события: 1) A — вынуты 2 белых шара; 2) B — вынуты 2 черных шара; 3) C — вынуты белый и черный шары.

Из 5 шаров можно составить $\frac{(5-1)5}{2}=10$ различных пар (см. формулу (1) из § 4 или граф на рисунке 42). Таким образом, число всевозможных исходов испытания $n=10$.

1) Событию A благоприятствует единственная пара белых шаров, т. е. $m=1$. Находим $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{10}$.

2) Событию B благоприятствуют 3 исхода — 3 различные пары из 3 черных шаров (см. граф на рисунке 43), т. е. $m=3$. Таким образом, $P(B)=\frac{m}{n}=\frac{3}{10}$.

3) Событию C благоприятствуют 6 исходов (см. граф на рисунке 44), т. е. $m=6$. Отсюда $P(C)=\frac{m}{n}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

Ответ. 1) $\frac{1}{10}$; 2) $\frac{3}{10}$; 3) $\frac{3}{5}$.

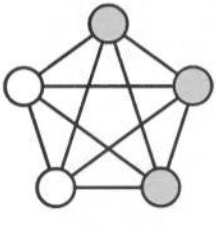


Рис. 42

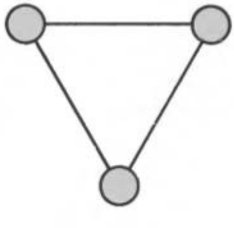


Рис. 43

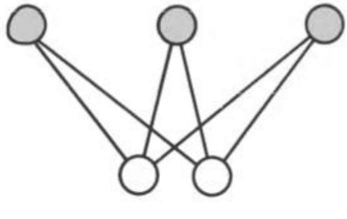


Рис. 44

Упражнения

1. Бросаются две монеты. Какова вероятность того, что: 1) выпадут две решки; 2) выпадут орел и решка?

2. Бросаются две монеты — копейка и пятак. Какова вероятность того, что: 1) на обеих монетах появится орел; 2) на копейке появится орел, а на пятаке — решка?

3. Бросаются две игральные кости — желтая и зеленая. Какова вероятность того, что появятся:
1) на желтой кости 2 очка, на зеленой 3 очка; 2) на одной кости 2 очка, а на другой 3 очка; 3) на желтой кости 5 очков; 4) на желтой кости четное число очков; 5) на обеих костях четные очки; 6) на желтой кости число очков, кратное 3, а на зеленой — четное число очков; 7) на обеих костях одинаковые очки; 8) очки, сумма которых равна 3; 9) очки, сумма которых не больше 3; 10) очки, сумма которых равна 11; 11) очки, сумма которых равна 10; 12) очки, сумма которых не меньше 10?

4. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение выпавших на костях очков равно: 1) 5; 2) 4; 3) 10; 4) 12.

---

5. На трех карточках написаны цифры 1, 2 и 3 (на каждой карточке по одной цифре). Случайным образом из этого набора выбирают последовательно по одной карточке и кладут в ряд, образуя трехзначное число. Какова вероятность того, что образуется число: 1) 321; 2) 231?

6. 4 одинаковых шара пронумерованы числами 1, 2, 3, 4 и сложены в ящик. Случайным образом из ящика извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что шары были извлечены в последовательности: 1) 4, 2, 1, 3; 2) 4, 3, 2, 1?

7. Брошены 3 игральные кости. Какова вероятность того, что: 1) на всех костях выпало по 2 очка; 2) на двух костях выпало по 2 очка, а на одной — 6 очков?

8. На каждой из двух карточек написана цифра 1, а на третьей — цифра 2. Эти три карточки перемешиваются и случайным образом выкладываются в ряд. Какова вероятность того, что образовалось число: 1) 112; 2) 121?

9. Из 4 шаров, занумерованных числами 1, 2, 3 и 4, наугад выбирают 2 шара. Какова вероятность того, что вынутые шары имеют номера 2 и 3?

10. В ящике лежат 1 белый и 3 черных шара. Наугад вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что вынуты: 1) 2 черных шара; 2) белый и черный шары?

11. В ящике находятся 2 белых и 2 черных шара. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что вынуты: 1) 2 белых шара; 2) один белый и один черный шары?

12. В ящике находятся 4 белых и 1 черный шар. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что вынуты: 1) 2 белых шара; 2) белый и черный шары.

13. Из колоды карт (36 листов) наугад вынимают 2 карты. Какова вероятность того, что это: 1) дама треф и валет пик; 2) две шестерки?

§ 10. Геометрическая вероятность

Существует класс задач, в которых оценить вероятность случайного события можно из геометрических соображений.

В § 7 мы уже находили вероятность того, что стрелка рулетки остановится на одном из четырех равных секторов. А как следовало поступить, если бы поверхность рулетки была разделена не на равные секторы?

Задача 1. Сектор А занимает половину рулетки, а ее вторая половина разделена на два одинаковых сектора Б и В (рис. 45). Какова вероятность того, что после раскручивания стрелка рулетки остановится: 1) на секторе А; 2) на секторе В?

Стрелка может случайным образом остановиться в любой части круга рулетки. *Вероятность того, что стрелка остановится на интересующем нас секторе, естественно считать равной отношению площади этого сектора $S_{сект}$ к площади всего круга S:*

$$P = \frac{S_{\text{сект}}}{S}. \qquad (1)$$

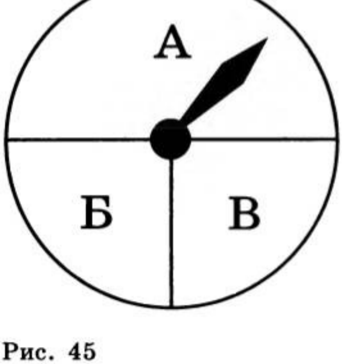


Рис. 45

1) Площадь $S_А$ сектора А в два раза меньше площади S всего круга, значит, вероятность остановки стрелки на секторе А равна $P = \frac{S_А}{S} = \frac{1}{2}$.

2) Площадь $S_В$ сектора В в 4 раза меньше площади всего кру-

га S, значит, вероятность остановки стрелки на секторе В равна $P=\frac{S_В}{S}=\frac{1}{4}$.

Ответ. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{4}$. ◁

Задача 2. На отрезке $AB=15$ см произвольным образом выделен отрезок $MN=3$ см (рис. 46). На отрезке AB случайным образом отмечается точка X. Какова вероятность того, что эта точка попадет на отрезок MN?

▶ Вероятность P попадания точки X на отрезок MN, составляющий часть отрезка AB, определяется по формуле

$$P=\frac{MN}{AB}. \qquad (2)$$

При $MN=3$ см, $AB=15$ см вероятность попадания точки X на отрезок MN равна:

$$P=\frac{MN}{AB}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}.$$

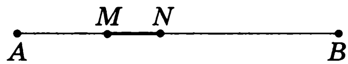


Рис. 46

Ответ. $\frac{1}{5}$. ◁

В формулах (1) и (2) можно рассматривать попадание стрелки на сектор площади $S_{сект}$ и попадание точки X на отрезок длиной MN как благоприятствующие исходы рассматриваемых испытаний, а площадь всего круга и длину отрезка AB как все возможные исходы соответствующих испытаний.

Упражнения

1. Поверхность рулетки разделена на секторы следующим образом: равные секторы 1 и 2 занимают половину площади круга, а вторая его половина разделена на три равных сектора 3, 4 и 5 (рис. 47). Какова вероятность того, что после раскручивания стрелка рулетки остановится на: 1) секторе 1; 2) секторе 3; 3) части поверхности рулетки, занимаемой секторами 1 и 2; 4) части поверхности рулетки, занимаемой секторами 4 и 5; 5) части поверхности рулетки, занимаемой секторами 1 и 5?

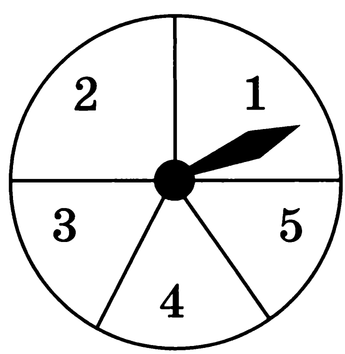


Рис. 47

2. Дано: $AB = 12$ см, $AM = 2$ см, $MN = 4$ см (рис. 48). На отрезке AB случайным образом отмечается точка X. Какова вероятность того, что точка X попадет на отрезок: 1) AM; 2) AN; 3) MN; 4) MB; 5) AB?

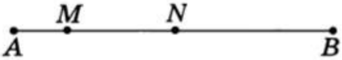


Рис. 48

---

3. Внутри квадрата со стороной 10 см выделен круг радиусом 2 см (рис. 49). Случайным образом внутри квадрата отмечается точка. Какова вероятность того, что она попадет в выделенный круг?

4. Чему равна вероятность того, что случайным образом отмеченная на отрезке AB точка X совпадет с серединой отрезка?

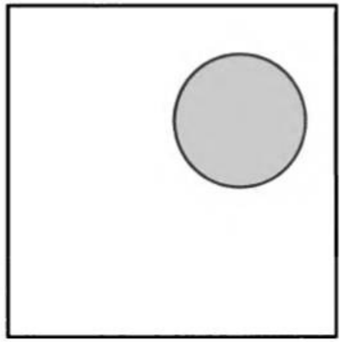


Рис. 49

§ 11. Противоположные события и их вероятности

Задача 1. На школьном вечере среди присутствующих 100 учащихся случайным образом распространили 100 лотерейных билетов (каждый школьник получил по одному билету). Среди этих билетов было 5 выигрышных. Какова вероятность того, что конкретному школьнику из числа присутствующих достался: 1) выигрышный билет; 2) невыигрышный билет?

Каждому школьнику мог достаться любой из 100 билетов, т. е. $n = 100$.

1) Благоприятствующих выигрышу билетов 5, т. е. $m = 5$. Тогда $P = \frac{m}{n} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ (иногда вероятность выражают в процентах, поэтому можно записать, что $P = 5\%$).

2) Невыигрышных билетов $100 - 5 = 95$, поэтому «не выигрышу» благоприятствует 95 исходов: $m = 95$. Таким образом, вероятность получить невыигрышный билет равна $P = \frac{m}{n} = \frac{95}{100} = \frac{19}{20}$ (или 95%).

Ответ. 1) $\frac{1}{20}$; 2) $\frac{19}{20}$.

События «выигрыш» и «не выигрыш» в лотерее являются *противоположными событиями.*

Событие $\overline{A}$ (читается: «A с чертой» или «Не A») называют событием, *противоположным* событию A, если оно происходит, когда не происходит событие A.

Приведем еще несколько примеров противоположных событий:

1) «выигрыш» и «не выигрыш» в любой игре;

2) «появление орла» и «появление решки» в результате одного бросания монеты;

3) «появление двух очков» и «появление не двух очков» (т. е. появление либо 1, либо 3, либо 4, либо 5, либо 6 очков) в результате одного бросания игрального кубика;

4) «остановка стрелки на секторе 3» (рис. 50) и «остановка стрелки не на секторе 3» (т. е. остановка на любом из секторов 1, 2 или 4) в результате раскручивания стрелки рулетки;

5) «появление числа очков, кратного 3» и «появление числа очков, не кратного 3» (т. е. появление либо 1, либо 2, либо 4, либо 5 очков) в результате бросания кости.

● Пусть в некотором испытании имеется n равновозможных исходов. И пусть событию A в этом испытании благоприятствует m_1 исходов, а противоположному ему событию $\overline{A}$ благоприятствует m_2 исходов. Нетрудно заметить, что

$$m_1 + m_2 = n. \qquad (1)$$

По определению вероятности события:

$$P(A) = \frac{m_1}{n}, \; P(\overline{A}) = \frac{m_2}{n}.$$

Найдем сумму вероятностей противоположных событий A и $\overline{A}$, используя соотношение (1):

$$P(A) + P(\overline{A}) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{n}{n} = 1. \; \bigcirc$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \qquad (2)$$

Из формулы (2) легко выразить вероятность события $\overline{A}$:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \qquad (2')$$

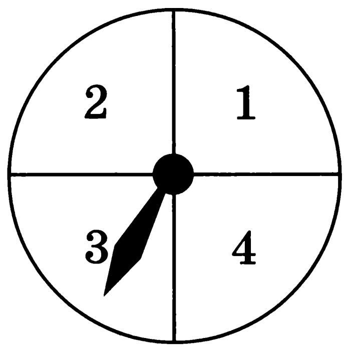


Рис. 50

Задача 2. Вероятность попадания некоторым стрелком по бегущей мишени равна 0,8. Какова вероятность того, что этот стрелок промахнется, сделав выстрел?

Пусть событие A — попадание по мишени, тогда $P(A)=0{,}8$. Событие $\overline{A}$ — промах согласно формуле (2′) имеет вероятность

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}8=0{,}2.$$

Ответ. 0,2.

Возвращаясь к решению задачи 1, можно заметить, что после нахождения вероятности выигрыша в лотерее $\left(\frac{1}{20}\right)$ вероятность не выигрыша можно найти также с помощью формулы (2′):

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}.$$

Заметим, что ряд вероятностных задач решается проще, если сначала найти вероятность противоположного события.

Задача 3. В школьном научном обществе 10 человек: 7 мальчиков и 3 девочки. Случайным образом из членов этого общества выбирают двух учащихся на городскую конференцию. Какова вероятность того, что среди выбранных двух человек окажется хотя бы одна девочка?

Пусть событие A — среди выбранных двух человек окажется хотя бы одна девочка (т. е. либо одна, либо две девочки). Тогда событие $\overline{A}$ — среди выбранных двух человек нет ни одной девочки (т. е. выбраны только мальчики). Найдем сначала вероятность события $\overline{A}$.

Благоприятствующими событию $\overline{A}$ исходами будут всевозможные пары, составленные из 7 мальчиков. Их число (согласно формуле (1) из § 4) равно $\frac{(7-1)7}{2}=21$, т. е. $m=21$. Число всевозможных пар, составленных из 10 школьников, равно $\frac{(10-1)10}{2}=45$, т. е. $n=45$. Таким образом, $P(\overline{A})=\frac{m}{n}=$ $=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}$.

Тогда согласно формуле (2′) $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$.

Ответ. $\frac{8}{15}$.

Упражнения

1. Назвать событие, противоположное указанному в данном испытании:
1) при бросании монеты выпала решка;
2) при бросании игральной кости выпало 5 очков;
3) при бросании игральной кости выпало четное число очков;
4) Алеша вытащил выигрышный билет в розыгрыше лотереи;
5) после раскручивания стрелки рулетки (см. рис. 50) она остановилась на секторе 4;
6) из ящика, в котором лежат 2 белых и 3 черных шара, случайным образом вынут белый шар.

2. Вероятность выигрыша, приходящаяся на один билет в школьной лотерее, равна: 1) 0,03; 2) $\frac{2}{121}$. Какова вероятность получения невыигрышного билета в этой лотерее?

3. Событие A — на игральной кости выпало меньше 5 очков. Что означает событие $\overline{A}$? Выразить значение $P(\overline{A})$ в процентах.

4. Какова вероятность того, что при одном бросании игральной кости выпадает не 6 очков?

5. Найти вероятность того, что наугад вынутая из полного набора домино одна костяшка не будет дублем.

6. В ящике лежат 3 белых, 4 черных и 5 красных шаров. Какова вероятность того, что наугад вынутый шар окажется: 1) не белым; 2) не черным; 3) не красным?

7. Событие B — в результате стрельбы по мишени хотя бы одна пуля попала в цель. Что означает событие $\overline{B}$?

---

8. Брошены 2 игральные кости. Какова вероятность того, что на обеих костях не выпало: 1) по 3 очка; 2) два одинаковых числа очков?

9. Из набора домино вынуты случайным образом 2 костяшки. Найти вероятность того, что это: 1) не костяшки «2 и 3», «5 и 6»; 2) не два дубля.

10. Из колоды карт (36 листов) наугад вынуты 2 карты. Найти вероятность того, что это: 1) не шестерка треф и не десятка пик; 2) не два туза.

§ 12. Относительная частота и закон больших чисел

Определение вероятности, сформулированное в § 8, называется *классическим определением вероятности*. Классическое определение не требует, чтобы испытание обязательно проводилось в действительности: теоретическим способом определяются все равновозможные и благоприятствующие событию исходы.

Такое определение предполагает, что число элементарных исходов испытания конечно и выражается конкретным числом. Однако на практике — при изучении случайных явлений в естествознании, экономике, медицине, производстве — часто встречаются испытания, у которых число возможных исходов необозримо велико. А в ряде случаев до проведения реальных испытаний трудно или невозможно установить равновозможность исходов испытания. Например, до многократного подбрасывания кнопки (рис. 51) трудно представить, равновозможны ли ее падения «на плоскость» (а) и «на острие» (б). Поэтому, наряду с классическим, на практике используют и так называемое *статистическое определение вероятности*. Для знакомства с ним требуется ввести понятие *относительной частоты*.

а) б)

Рис. 51

Относительной частотой события A в данной серии испытаний называют отношение числа испытаний M, в которых это событие произошло, к числу всех проведенных испытаний N. При этом число M называют *частотой* события A.

Относительную частоту события A обозначают $W(A)$, поэтому по определению:

$$W(A)=\frac{M}{N}. \qquad (1)$$

Задача 1. Во время тренировки в стрельбе по цели было сделано 30 выстрелов и зарегистрировано 26 попаданий. Какова относительная частота попадания по цели в данной серии выстрелов?

Событие A — попадание по цели произошло в 26 случаях, т. е. $M=26$. Общее число испытаний $N=30$, поэтому

$$W(A)=\frac{26}{30}=\frac{13}{15}.$$

Ответ. $\frac{13}{15}$.

Исследование 1. Два друга проводили испытания (опыты) с подбрасыванием монеты и наблюдали за появлением орла. Один из мальчиков подбрасывал монету и сообщал о том, что выпало — орел (О) или решка (Р). Второй мальчик вносил результаты испытаний во второй столбец таблицы:

N	О или Р	M	$W=\frac{M}{N}$	N	О или Р	M	$W=\frac{M}{N}$
1	О	1	1	20	Р	9	0,45
2	О	2	1	21	О	10	0,4762
3	Р	2	0,6667	22	Р	10	0,4545
4	О	3	0,75	23	О	11	0,4783
5	Р	3	0,6	24	Р	11	0,4583
6	О	4	0,6667	25	О	12	0,48
7	Р	4	0,5714	26	О	13	0,5
8	Р	4	0,5	27	Р	13	0,4815
9	О	5	0,5556	28	О	14	0,5
10	Р	5	0,5	29	О	15	0,5172
11	Р	5	0,4545	30	Р	15	0,5
12	Р	5	0,4167	31	Р	15	0,4839
13	О	6	0,4615	32	О	16	0,5
14	Р	6	0,4286	33	Р	16	0,4848
15	Р	6	0,4	34	О	17	0,5
16	О	7	0,4375	35	О	18	0,5143
17	О	8	0,4706	36	Р	18	0,5
18	Р	8	0,4444	37	О	19	0,5135
19	О	9	0,4737	38	О	20	0,5263

N	О или Р	M	$W=\frac{M}{N}$	N	О или Р	M	$W=\frac{M}{N}$
39	Р	20	0,5128	45	Р	22	0,4889
40	О	21	0,525	46	О	23	0,5
41	Р	21	0,5122	47	Р	23	0,4894
42	Р	21	0,5	48	О	24	0,5
43	О	22	0,5116	49	О	25	0,5102
44	Р	22	0,5	50	Р	25	0,5

После пятидесяти подбрасываний в третьем столбце друзья записали результаты «накопления» частоты M появления орла, а в четвертом — подсчет с помощью микрокалькулятора для каждого значения N (числа испытаний) относительной частоты $\frac{M}{N}$ (с точностью до одной десятитысячной). После этой работы мальчики на рисунке 52 отметили точками результаты математической обработки проведенных испытаний. Один из друзей, глядя на рисунок, сказал, что он похож на график затухающих колебаний.

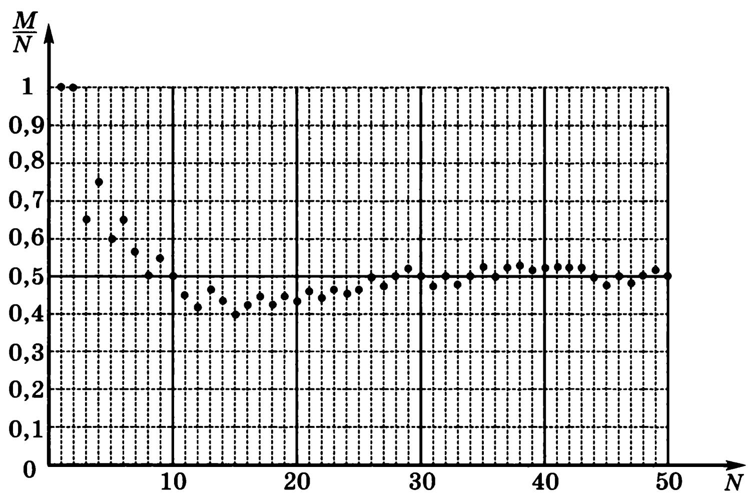


Рис. 52

Придя в класс, друзья предложили всем 20 одноклассникам проделать аналогичные опыты с подбрасыванием монеты: каждый ученик бросал монету 50 раз и считал появление орла. После этого друзья составили сводную таблицу результатов испытаний, суммируя в первом столбце число N проводимых всеми учащимися испытаний, во втором — количество появлений орла M и находя в третьем столбце для каждой серии испытаний относительные частоты события W.

N	M	$W=\frac{M}{N}$	N	M	$W=\frac{M}{N}$
50	25	0,5	550	276	0,5018
100	48	0,48	600	302	0,5033
150	74	0,4933	650	328	0,5046
200	101	0,5051	700	347	0,4957
250	126	0,504	750	372	0,496
300	145	0,4833	800	398	0,4975
350	169	0,4829	850	427	0,5024
400	196	0,49	900	448	0,4978
450	222	0,4933	950	477	0,5021
500	253	0,506	1000	502	0,502

Друзья заметили, что после значительного числа испытаний относительная частота появления орла все меньше отличается от 0,5, т. е. от величины вероятности этого события в классическом понимании.

Под *статистической вероятностью* понимают число, около которого колеблется относительная частота события при большом числе испытаний.

Описанный в исследовании 1 факт подтверждают и дошедшие до нас исторические сведения.

Известно, что в XVIII в. французский естествоиспытатель Жорж Луи Леклерк де Бюффон (1707—1788) провел 4040 испытаний с подбрасыванием монеты. В результате чего наблюдал появление орла 2048 раз. Таким образом, Бюффон получил относительную частоту появления орла, равную $\frac{2048}{4040} \approx 0{,}5069$. В начале XX в. английский ученый Карл Пирсон (1857—1936) провел с помощью своих учеников 24 000 аналогичных испытаний и наблюдал 12 012 появлений орла. Относительная частота события у Пирсона оказалась равной $\frac{12\,012}{24\,000} = 0{,}5005$.

Аналогичные исследования с большим числом испытаний проводились различными людьми в разные годы. В связи с этим и ему подобными явлениями швейцарский математик Якоб Бернулли (1654—1705) обосновал так называемый *закон больших чисел*:

> Можно считать достоверным тот факт, что при большом числе испытаний относительная частота события $W(A)$ практически не отличается от его вероятности $P(A)$, т. е. $P(A) \approx W(A)$ при большом числе испытаний.

Задача 2. Родильный дом некоторого города вел по годам подсчет рождения мальчиков и девочек. Результаты заносились в таблицу.

Год	Число родившихся детей	
	Девочки	Мальчики
1998	802	823
1999	629	665
2000	714	769
2001	756	798
2002	783	811

Какова вероятность появления на свет мальчика? Можно ли считать равновозможными события «родился мальчик» и «родилась девочка»?

▶ Число родившихся мальчиков: $M = 823 + 665 + 769 + 798 + 811 = 3866$. Число родившихся девочек: $802 + 629 + 714 + 756 + 783 = 3684$. Общее число родившихся детей $N = 3866 + 3684 = 7550$. Относительная частота появления в рассматриваемом родильном доме мальчиков равна

$$W = \frac{M}{N} = \frac{3866}{7550} \approx 0{,}5121.$$

Вероятность события A — появление на свет мальчика примем приблизительно равной 0,51, т. е. $P(A) \approx 0{,}51$. Вероятность противоположного события $\overline{A}$ — появление на свет не мальчика (т. е. девочки) равна $P(\overline{A}) = 1 - P(A) \approx 1 - 0{,}51 = 0{,}49$.

Так как $P(A) \neq P(\overline{A})$, то рождение мальчика и рождение девочки в данном роддоме нельзя считать равновозможными событиями. ◁

Отметим, что всемирные наблюдения за рождением детей показывают, что мальчиков на Земле рождается всегда чуть больше, чем девочек.

Исследование 2. На листе начерчены параллельные линии, расстояния между которыми равны длине иглы (рис. 53). Игла 100 раз бросается на этот лист, и случаи ее пересечения с любой из линий подсчитываются во втором столбце таблицы (N — число бросков, M — частота пересечения иглой линии, $\frac{M}{N}$ — относительная частота события).

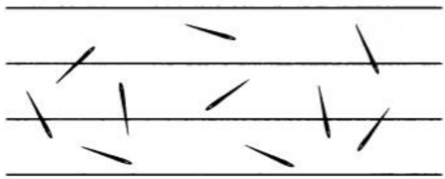


Рис. 53

N	M	$W = \frac{M}{N}$
10	6	0,6
20	14	0,7
30	19	0,6333
40	26	0,65
50	33	0,66
60	40	0,6667
70	46	0,6571
80	54	0,675
90	59	0,6556
100	66	0,66

Попробуем оценить вероятность события «игла пересекла линию». После заполнения третьего столбца таблицы можно сделать вывод, что значения дроби $\frac{M}{N}$ «колеблются» около числа $\frac{2}{3} \approx 0{,}6667$, и предположить, что вероятность рассматриваемого события равна $\frac{2}{3}$. Однако при очень большом числе испытаний выявляется, что относительная частота рассматриваемого события стабилизируется около числа, чуть меньшего, чем $\frac{2}{3}$.

В теории вероятностей на основании понятия геометрической вероятности доказывается, что вероятность этого события равна $\frac{2}{\pi}$. Этот факт был установлен в 1700 г. уже знакомым нам французским ученым Бюффоном.

Упражнения

1. Заполнить последний столбец таблицы:

№ п/п	Испытание	Число испытаний (N)	Событие A	Частота события A (M)	Относительная частота события A $\left(W(A) = \frac{M}{N}\right)$
1	Бросается монета	100	Выпала решка	52	
2	Спортсмен стреляет по мишени	100	Попадание по мишени	90	
3	Бросается игральная кость	500	Выпало 5 очков	84	

2. Новый препарат давался 1000 пациентам, больным одной и той же болезнью. По истечении курса лечения 952 пациента исцелились. Какова относительная частота исцеления в рассмотренном исследовании?

3. В изготовлении партии из 10 000 болтов обнаружено 250 бракованных болтов. Найти относительную частоту

Рис. 54

Рис. 55

появления в данной партии бракованного болта. Выразить результат в процентах.

4. Проводилась серия испытаний с подбрасыванием гайки (рис. 54). Результаты заносились в таблицу:

Число испытаний (N)	10	50	100	250	500	1000
Частота падения гайки плашмя (M)	7	33	67	155	316	627
Относительная частота падения гайки плашмя (W)						

Заполнить последнюю строку таблицы. Высказать предположение о значении вероятности P — падения гайки плашмя (с точностью до одной десятой).

5. Результаты испытаний с подбрасыванием наперстка (рис. 55) заносились в таблицу:

Число испытаний (N)	100	200	500	1000
Частота падения на бок (M_1)	83	169	421	839
Частота падения на большой круг (M_2)	15	28	72	141
Относительная частота падения на бок (W_1)				
Относительная частота падения на большой круг (W_2)				

Заполнить две последние строки таблицы. Высказать предположение о значении вероятности падения наперстка на бок (P_1) и на большой круг (P_2) с точностью до одной сотой.

6. (**Исследование.**) Результаты подбрасывания 100 раз ($N = 100$) игрального кубика занести в таблицу.

Исходы испытания	1 очко	2 очка	3 очка	4 очка	5 очков	6 очков
Подсчет случаев						
Частота (M)						
Относительная частота $\left(W = \frac{M}{100}\right)$						

Подсчет случаев удобно проводить следующим образом: после каждого броска кубика в соответствующую выпавшему числу очков клетку таблицы ставится знак «|». После накопления четырех вертикальных знаков пятый проводится горизонтально: «~~||||~~». После этого подсчет частот существенно упрощается. Например, если в клетке подсчета случаев стоят знаки «~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ||», то, очевидно, под ней, в клетке частоты, следует записать число 17 (получаемое как $5 \cdot 3 + 2$).

Объединив результаты исследований нескольких (k) учеников, составить сводную таблицу частот и относительных частот (для $N = 100k$ испытаний). Убедиться в том, что с увеличением числа испытаний относительная частота появления 1 очка, 2 очков, ..., 6 очков все меньше отличается от вероятности каждого из этих событий $P = \frac{1}{6}$.

§ 13. Тактика игр. Справедливые и несправедливые игры

Равными вероятностями появления орла и решки при бросании монеты часто пользуются для принятия решения в спорных ситуациях (например, при розыгрыше ворот в футболе). Часто и в повседневной жизни для «справедливого выбора» *одного из двух* возможных событий подбрасывают монетку.

Задача 1. В одной комнате студенческого общежития живут Антон, Борис и Василий. Нужно регулярно назначать дежурного по комнате. Юноши подбрасывают две монеты и в зависимости от результата определяют дежурного:

— если выпали орел и решка, дежурит Антон,

— если выпали два орла, дежурит Борис,

— если выпали две решки, дежурит Василий.

Справедлив ли такой подход к выбору дежурного?

Таблица исходов испытаний

1-я монета	2-я монета	
	О	Р
О	О О	О Р
Р	Р О	Р Р

Такой подход не является справедливым, так как вероятность появления орла и решки (ОР или РО) равна $\frac{1}{2}$ (два благоприятствующих из четырех возможных исходов — см. таблицу исходов), а вероятности появления двух решек или двух орлов одинаковы и равны $\frac{1}{4}$. Так как $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$, то можно сказать, что Антону, по всей вероятности, придется в 2 раза чаще дежурить, чем каждому из его друзей.

Задача 2. Доказать, что выбор преимущества между двумя играющими с помощью игры «Камень — ножницы — бумага» является справедливым.

Напомним правила игры. Каждый из двух игроков одновременно показывает (рис. 56) или сжатый кулак (К — камень), или два пальца (Н — ножницы), или открытую ладонь (Б — бумага). В появившейся паре:

1) К и Н — выигрывает К (камень разбивает ножницы); 2) К и Б — выигрывает Б (камень можно завернуть в бумагу); 3) Н и Б — выигрывает Н (ножницы режут бумагу).

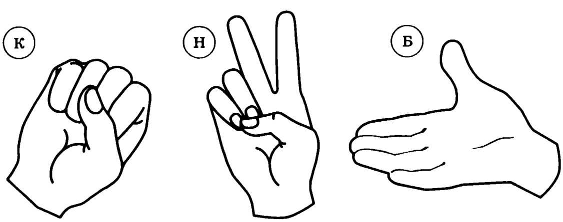


Рис. 56

Если оба игрока показывают одинаковые фигуры, происходит переигрывание до тех пор, пока не будут показаны разные фигуры.

▶ Способ является справедливым, так как вероятность появления любой пары (при исключении одинаковых фигур) одна и та же и равна $\frac{1}{3}$ — из 6 возможных исходов для каждой пары благоприятствуют 2 исхода (левая таблица — таблица исходов). Вероятность выигрыша каждой из фигур также равна $\frac{1}{3}$ (правая таблица — таблица выигрышей), что и требовалось доказать. ◁

I игрок	II игрок		
	К	Н	Б
К		КН	КБ
Н	НК		НБ
Б	БК	БН	

I игрок	II игрок		
	К	Н	Б
К		К	Б
Н	К		Н
Б	Б	Н	

Задача 3. Бросаются две игральные кости. Игроки делают ставки на выпавшую сумму очков на двух костях. Есть ли сумма, на которую выгодно делать ставку?

▶ Подсчитаем вероятность появления каждой суммы.

Общее число исходов n — появление всевозможных сумм на двух костях согласно правилу произведения равно $6 \cdot 6 = 36$. Составим таблицу сумм очков:

1-я кость	2-я кость					
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

С помощью таблицы для каждой конкретной суммы определим число благоприятствующих исходов m:

$$m_2 = m_{12} = 1,\ m_3 = m_{11} = 2,\ m_4 = m_{10} = 3,$$
$$m_5 = m_9 = 4,\ m_6 = m_8 = 5,\ m_7 = 6.$$

Вероятность появления той или иной суммы в результате бросания двух костей можно представить в виде следующей таблицы:

Сумма очков	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность $\left(P = \frac{m}{n}\right)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Наибольшую вероятность появления $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ имеет сумма очков, равная 7.

Ответ. Такая сумма есть, она равна 7 очкам. ◁

Упражнения

1. Выяснить, является ли справедливым выбор преимущества между двумя игроками с помощью: 1) случайного выбора одного из двух шаров разного цвета; 2) выбора случайным образом одной карты красной или черной масти из полной колоды карт; 3) ставки на четное или нечетное число очков, выпавших на брошенной игральной кости; 4) ставки на костяшку-дубль или костяшку, не являющуюся дублем, извлеченную случайным образом из полного набора домино.

2. Выяснить, является ли справедливым следующий выбор преимущества среди трех игроков с помощью двух карт красной масти и двух карт черной масти: «Преимущество достается первому игроку, если случайным образом вынуть две карты разных мастей; преимущество достается второму игроку, если вынимают две карты красной масти; преимущество достается третьему игроку, если вынуты обе карты черной масти».

Упражнения к главе II

1. В коробке находятся 3 черных, 4 красных и 5 синих карандашей. Наугад вынимается один карандаш. Найти вероятность того, что вынутый карандаш: 1) черный; 2) красный; 3) синий; 4) не черный; 5) не красный; 6) не синий; 7) зеленый; 8) или черный, или красный, или синий.

2. Наугад называется натуральное число от 1 до 30. Какова вероятность того, что это число: 1) 6; 2) не 6; 3) кратно 6; 4) не кратно 6; 5) простое число; 6) квадратное число; 7) треугольное число; 8) не меньше 27?

3. Витя забыл две последние цифры номера телефона приятеля и набрал их наугад. С какой вероятностью этот звонок попадет к приятелю?

4. На стол бросаются монета и игральный кубик. Какова вероятность того, что: 1) на монете появится орел, а на кубике — 2 очка; 2) на монете появится решка, а на кубике — нечетное число очков?

5. Брошены две игральные кости — белая и черная. Какова вероятность того, что: 1) на белой кости выпало четное число очков, а на черной — нечетное; 2) появятся 2 и 3 очка; 3) появятся два четных числа очков; 4) появятся четное и нечетное число очков?

6. Вероятность появления бракованной детали в партии равна 0,015. Найти вероятность того, что из этой партии будет изъята небракованная деталь.

---

7. Из колоды карт (36 листов) наугад вынимается одна карта. Какова вероятность того, что эта карта: 1) валет; 2) король черной масти; 3) с четным числом красной масти; 4) не с числом?

8. Брошены 3 монеты: копейка, пятак и гривенник. Какова вероятность того, что: 1) на копейке появится орел, а на пятаке и гривеннике — решки; 2) на всех монетах выпадут решки?

9. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что: 1) выпавшие очки не 5 и не 6; 2) выпали не два четных числа очков; 3) не выпали четное с нечетным числом очков.

10. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что: 1) хотя бы на одной кости появятся 3 очка; 2) хотя бы на одной кости появится четное число очков?

11. В ящике находятся 3 белых и 2 черных шара. Наугад вынимаются 2 шара. Какова вероятность того, что вынуты: 1) 2 белых шара; 2) 2 черных шара; 3) черный и белый шары; 4) не 2 белых шара; 5) не разноцветные шары?

12. Из колоды карт (36 листов) наугад вынуты две карты. Какова вероятность того, что среди них: 1) хотя бы одна карта трефовой масти; 2) хотя бы одна карта — туз?

Глава III

Случайные величины

§ 14. Таблицы распределения

В § 13 рассматривалась задача о нахождении вероятности появления той или иной суммы очков при бросании двух игральных костей. Появляющаяся сумма очков — *случайная величина*. Обозначим ее X. Тогда $X_1 = 2$, $X_2 = 3$, ..., $X_{10} = 11$, $X_{11} = 12$ — значения случайной величины X. Соответствующие каждому значению X вероятности их появления P_1, P_2, ..., P_{10}, P_{11} указаны в таблице:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

С помощью этой таблицы легко увидеть, например, какие значения величина X принимает с одинаковыми вероятностями; какое значение величины X появляется с большей вероятностью и т. д.

Нередко встречаются случайные величины, принимающие одинаковые значения, но с разными вероятностями. Рассмотрим, например, 3 игральных кубика, на гранях которых отмечены только одно или два очка: у кубика A одно очко встречается на гранях один раз, у кубика B — 2 раза, а у кубика C — 3 раза (рис. 57).

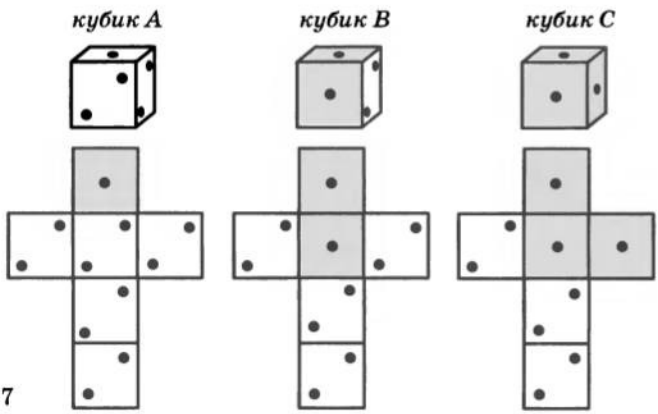


Рис. 57

Случайные величины X, Y и Z — число очков, выпавшее после бросания на кубиках A, B и C соответственно, имеют одинаковые значения: $X_1 = Y_1 = Z_1 = 1$, $X_2 = Y_2 = Z_2 = 2$. Вероятности же появления этих чисел на каждом из рассмотренных кубиков различны (см. таблицы).

X	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

кубик A

Y	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

кубик B

Z	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

кубик C

Эти таблицы называют *таблицами распределения значений случайной величины по их вероятностям.* Очевидно, что они составлены после *теоретического* расчета вероятностей событий.

Рассмотрим примеры случайных величин, для которых невозможно записать распределение их значений по вероятностям, исходя только из теоретических соображений.

Пример 1. Падение некоторой кнопки «на острие» или «на плоскость» может быть рассмотрено как случайная величина R с условными значениями $R_1 = 0$ (падение «на острие») и $R_2 = 1$ (падение «на плоскость»).

В отличие от примеров с бросанием игральных кубиков, распределение значений величины R не может быть найдено теоретически. Поэтому записать его можно лишь после проведения серии опытов (см. § 12), т. е. *эмпирическим* путем — с помощью относительной частоты. Для некоторой конкретной кнопки распределение значений случайной величины R по относительным частотам представлено с помощью таблицы:

R	0	1
W	0,55	0,45

Пример 2. Случайная величина X — оценка за контрольную работу учащихся IX класса, может принимать значения $X_1 = 1$, $X_2 = 2$, $X_3 = 3$, $X_4 = 4$, $X_5 = 5$. Распределение величины X по частотам (или относительным частотам) можно записать лишь после реального подсчета каждого ее значения.

Задача 1. После проверки контрольной работы в IX классе учитель сделал подсчет каждой из полученных оценок и составил таблицу распределения значений величины X (оценка учащегося) по частотам M (см. табл.).

X	1	2	3	4	5
Подсчет случаев	$\vert$	$\vert\vert\vert$	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\vert\vert\vert\vert$	$\vert\vert\vert$
M	1	3	15	9	3

Составить таблицу распределения значений величины X по относительным частотам.

Число учащихся IX класса N, писавших контрольную работу, равно сумме частот (M) всех выставленных оценок, т. е.

$$N=1+3+15+9+3=31.$$

Зная, что относительная частота находится по формуле $W=\frac{M}{N}$, вычислим относительную частоту для каждого значения величины X:

$$W_1=\frac{1}{31},\ W_2=\frac{3}{31},\ W_3=\frac{15}{31},\ W_4=\frac{9}{31},\ W_5=\frac{3}{31}.$$

Ответ.

X	1	2	3	4	5
W	$\frac{1}{31}$	$\frac{3}{31}$	$\frac{15}{31}$	$\frac{9}{31}$	$\frac{3}{31}$

Когда нужно находить сумму всех значений некоторой величины, используют знак Σ, введенный Л. Эйлером (1707—1783). Например, если частота M принимает значения M_1, M_2, ..., M_k, то введем обозначение:

$$M_1+M_2+\ldots+M_k=\Sigma M.$$

Зная, что сумма всех частот случайной величины равна числу испытаний N, можно записать

$$\Sigma M=N.$$

Покажем, что для любой случайной величины сумма относительных частот всех ее значений равна 1.

● $$\Sigma W=\Sigma\left(\frac{M}{N}\right)=\frac{M_1}{N}+\frac{M_2}{N}+\ldots+\frac{M_k}{N}=\frac{M_1+M_2+\ldots+M_k}{N}=$$
$$=\frac{\Sigma M}{N}=\frac{N}{N}=1.$$ ○

Например, в задаче 1:

$$\Sigma W = \frac{1}{31} + \frac{3}{31} + \frac{15}{31} + \frac{9}{31} + \frac{3}{31} = 1.$$

Задача 2. Рост каждой из 50 гимнасток одного спортивного клуба занесен в таблицу:

148	148	148	149	149	149	149	149	149	149
149	150	150	150	150	150	150	150	150	150
150	151	151	151	151	151	151	151	151	152
152	152	152	152	152	152	152	152	153	153
153	153	153	153	153	154	154	154	154	154

По имеющимся данным составить таблицу распределения значений случайной величины X — роста гимнасток клуба: 1) по частотам (M); 2) по относительным частотам (W).

Величина X принимает значения $X_1 = 148$, $X_2 = 149$, ..., $X_7 = 154$. Подсчитывая число (M) гимнасток каждого роста, заносим данные в частотную таблицу, а затем для каждого значения X находим значение относительной частоты W, зная, что $N = 50$.

X	148	149	150	151	152	153	154
M	3	8	10	8	9	7	5
$W = \frac{M}{N}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{1}{10}$

Проверка: $\Sigma M = 3 + 8 + 10 + 8 + 9 + 7 + 5 = 50 = N$; $\Sigma W = 1$.

Рассмотренные в этом параграфе случайные величины принимали изолированные друг от друга значения. Такие величины называют *дискретными* (от латинского *discretus* — раздельный, прерывистый).

Если случайная величина может принимать любое значение из некоторого промежутка, то такая величина называется *непрерывной*. Например, время T ожидания автобуса на остановке, когда пассажир приходит на остановку случайным образом, зная лишь, что автобусы ходят через 10 мин, есть непрерывная случайная величина, принимающая любое числовое значение $T \in [0;\ 10]$.

Очевидно, число значений непрерывной случайной величины бесконечно, независимо от того, является ли промежуток значений ограниченным (отрезком) или неограниченным. Однако существует способ, с помощью которого можно задать распределение и непрерывной случайной величины. Для этого промежуток значений величины разбивают на части и считают частоты (или вероятности) попадания значений случайной величины в каждую из них.

Пример 3. Пусть время горения T (в часах) электрической лампочки некоторого вида $T \in [0;\ 1000]$. Промежуток $[0;\ 1000]$ разделили на 5 одинаковых по длине частей и результаты горения каждой из 100 экспериментальных лампочек занесли в частотную таблицу распределения:

T	[0; 200)	[200; 400)	[400; 600)	[600; 800)	[800; 1000]
M	1	3	10	18	68

Упражнения

1. Составить таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины X — числа очков, появившихся при бросании: 1) обыкновенного игрального кубика; 2) кубика, на двух гранях которого отмечено 1 очко, на двух гранях — 2 очка, на двух гранях — 3 очка; 3) кубика, на трех гранях которого отмечено 1 очко, на двух — 2 очка, на одной грани — 3 очка; 4) кубика, на двух гранях которого отмечено 1 очко, на трех — 2 очка, на одной — 3 очка.

2. На стол бросаются две монеты. Исходу «орел» припишем условное числовое значение 0, а исходу «решка» — 1. Составить таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины X — суммы выпавших на монетах чисел.

3. На стол одновременно бросаются два игральных тетраэдра, грани каждого из которых пронумерованы числами 1, 2, 3 и 4. Составить таблицу распределения по вероятностям значений случайной величины X — суммы очков на гранях тетраэдров, касающихся поверхности стола.

4. На стол одновременно бросаются игральный кубик и игральный тетраэдр (грани которого пронумерованы числами 1, 2, 3 и 4). Составить таблицу распределения по ве-

роятностям значений случайной величины X — суммы очков, выпавших на кубике и на грани тетраэдра, касающейся поверхности стола.

5. Составить таблицу распределения по частотам M значений случайной величины X — цифр, встречающихся на ценниках товаров некоторого киоска (цены приведены в рублях):

73, 102, 225, 30, 44, 68, 76, 5, 90, 119,
86, 24, 37, 207, 8, 45, 51, 13, 201, 69.

6. В таблице записаны размеры обуви 20 девочек IX класса:

34	35	35	35	36	36	36	36	37	37
37	37	37	37	38	38	38	39	39	40

На основании этих данных составить таблицы распределения по частотам (M) и относительным частотам (W) значений случайной величины X — размеров обуви девочек IX класса.

---

7. В таблице приведены размеры одежды 50 учащихся IX класса:

50	40	44	44	46	46	44	48	46	44
38	44	48	50	40	42	50	46	54	44
42	42	52	44	46	38	46	42	44	48
46	48	44	40	52	44	48	50	46	46
48	40	46	42	44	50	46	44	46	48

На основании этих данных составить таблицы распределения по частотам и относительным частотам значений случайной величины X — размеров одежды учащихся IX класса.

8. Рассматривая произвольную страницу текста на русском языке из произведения русского писателя, составить таблицы распределения по частотам и по относительным частотам всех букв русского алфавита.

9. Используя результаты, полученные в упражнении 8, и «шифр простой замены» (каждой букве русского алфавита соответствует свое двузначное число), расшифровать строки, принадлежащие А. С. Пушкину:

... 11 39 22 24 33 39, 35 11 21 38 31 30 28 11 30 29 38 33 17 36 22 37 23,

38 11 35 33 37 27 17 39 15 21 38 22 24 15 25 39 22 32 31,

24 35 22, 28 11 26 22 36 21 31 36 23, 38 11 35 33 37 33 27 23 32 31

33 37 33 21 37 33 27 36 15 37 33, 28 11 30 34 33 36 15 36 22 37 23 ...

§ 15. Полигоны частот

Распределение случайных величин можно задавать и демонстрировать графически.

Пусть случайная величина X — размер обуви мальчиков IX классов одной школы имеет распределение по частотам, представленное в таблице:

X	38	39	40	41	42	43	44	45
M	2	2	5	7	6	4	3	1

$N = \Sigma M = 30$

Отметим на координатной плоскости точки с координатами $(X_1; M_1)$, $(X_2; M_2)$, ..., $(X_8; M_8)$ и соединим их последовательно отрезками (рис. 58). Полученную ломаную линию называют *полигоном частот*.

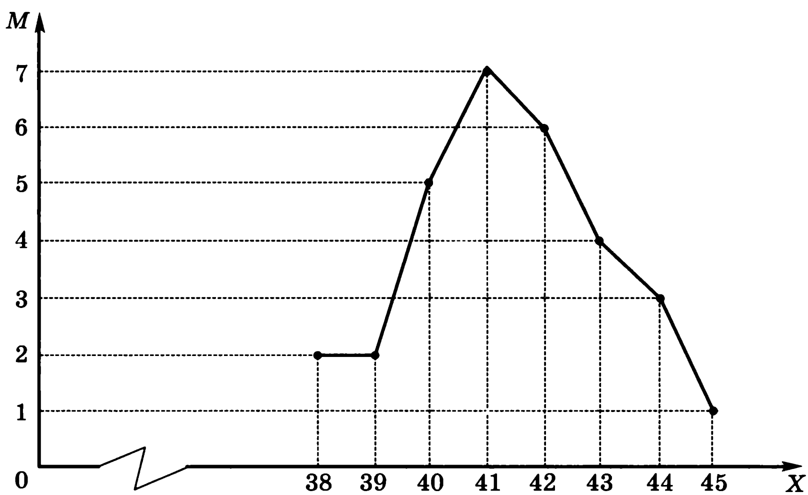


Рис. 58

Возможно графическое представление распределения случайной величины и по относительным частотам. Допустим, в фонде некоторой библиотеки имеются книги следующих направлений:

1. Художественная и детская литература.
2. Учебная и педагогическая литература.
3. Общественно-политическая литература.
4. Научно-техническая литература.
5. Энциклопедии и словари.

Распределение величины X — числа книг того или иного направления по относительным частотам представлено в таблице, где 1, 2, 3, 4 и 5 — условные значения случайной величины X (соответствующие ее порядковому номеру в списке наименований направлений).

X	1	2	3	4	5	
W	0,55	0,21	0,1	0,08	0,06	$\Sigma W = 1$

Распределение величины X можно наглядно представить в виде *полигона относительных частот* (рис. 59), в виде линейной диаграммы (рис. 60) или в виде круговой диаграммы, предварительно переведя значения относительной частоты в проценты (рис. 61).

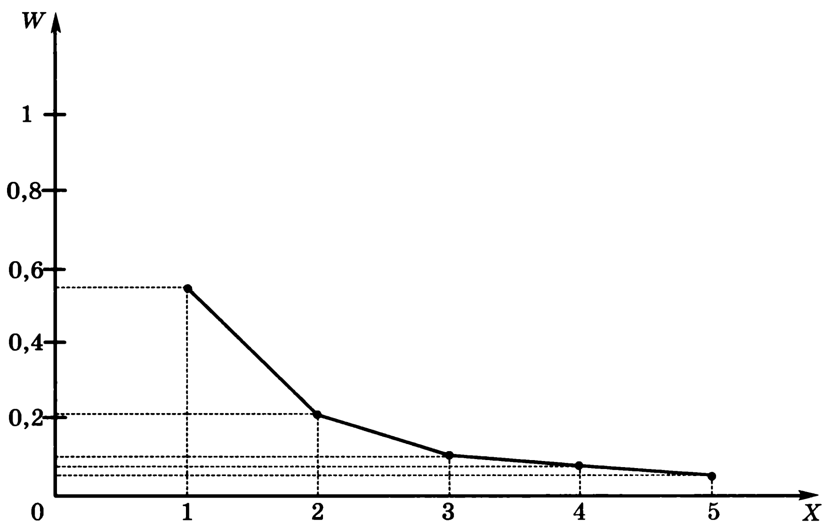


Рис. 59

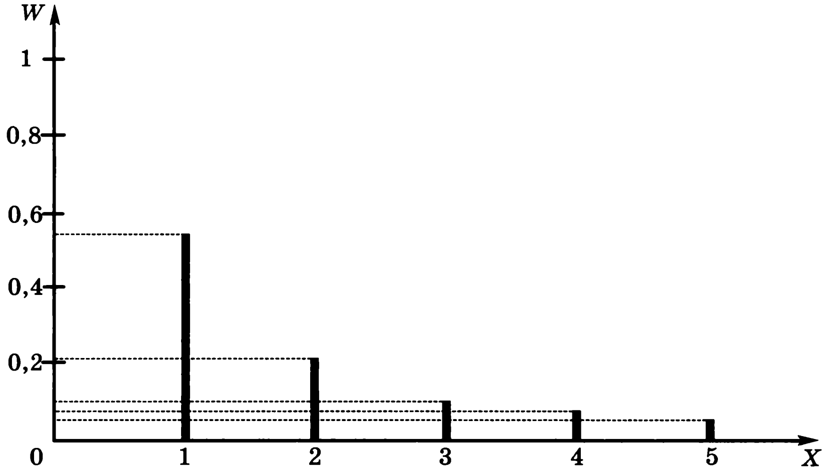


Рис. 60

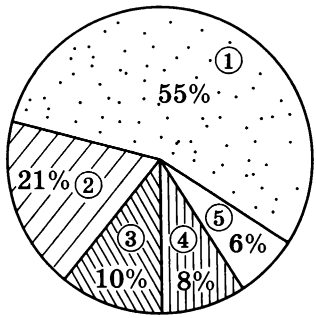


Рис. 61

Если случайная величина принимает много различных значений, то их распределение можно представить после разбиения на классы всех ее значений. Количество классов может быть любым, удобным для изучения (обычно их выбирают в количестве от 4 до 12). При этом величины (объемы) классов должны быть одинаковыми.

Рассмотрим пример.

В таблице представлены сведения о заработной плате 100 рабочих одного предприятия. При этом заработные платы (округленные до целого числа рублей) сгруппированы в 7 классов, каждый объемом в 1000 р.

Классы	От 1001 до 2000	От 2001 до 3000	От 3001 до 4000	От 4001 до 5000	От 5001 до 6000	От 6001 до 7000	От 7001 до 8000
Номер класса X	1	2	3	4	5	6	7
Частота (количество рабочих) M	4	6	18	36	22	10	4

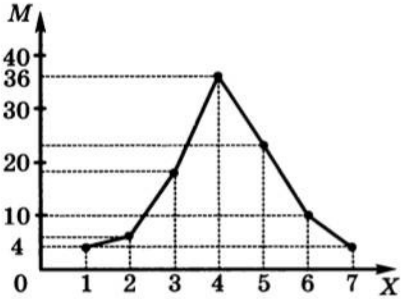


Рис. 62

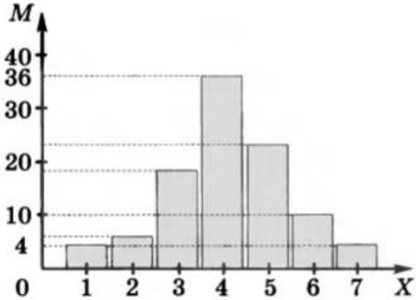


Рис. 63

Проверка: $\Sigma M = 100$.

Наглядно частотное распределение зарплат по классам можно представить с помощью полигона частот (рис. 62) или столбчатой диаграммы (рис. 63).

Распределение значений непрерывной случайной величины также можно представить графически.

Вернемся к таблице частот, рассмотренной в § 14:

X	[0 ; 200)	[200 ; 400)	[400 ; 600)	[600 ; 800)	[800 ; 1000]
M	1	3	10	18	68

$\Sigma M = N = 100$

Данные этой таблицы можно представить с помощью так называемой *гистограммы частот* — ступенчатой фигуры (рис. 64).

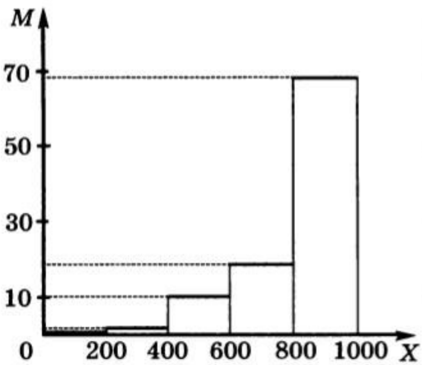


Рис. 64

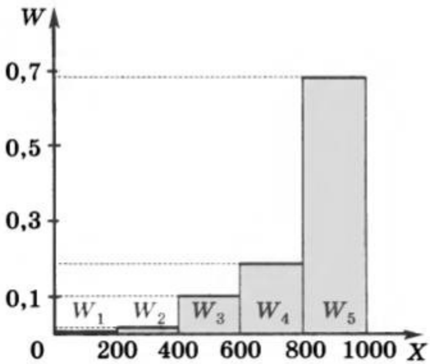


Рис. 65

Если основанием каждой ступени служит промежуток значений случайной величины длиной h, то высоту столбца берут равной $\frac{M}{h}$, где M — частота значений величины X на соответствующем промежутке. Тогда площадь такого столбца будет равна $\frac{M}{h} \cdot h = M$, а площадь фигуры под гистограммой равна $\Sigma M = N$.

Если по данным предыдущей таблицы заполнить таблицу относительных частот, то построенную на ее основе ступенчатую фигуру называют *гистограммой относительных частот* (рис. 65).

X	[0 ; 200)	[200; 400)	[400 ; 600)	[600 ; 800)	[800 ; 1000]
W	0,01	0,03	0,1	0,18	0,68

$\Sigma W = 1$

Гистограмму относительных частот строят обычно таким образом, чтобы площадь каждого столбца под ступенькой была равна соответствующему значению W. Тогда площадь фигуры под гистограммой будет равна единице ($\Sigma W = 1$).

Следует отметить, что в действительности используемые нами дискретные случайные величины, связанные с течением времени, с ростом живых организмов (людей, растений и т. д.), являются средними значениями промежутков значений непрерывных случайных величин. Например, размер одежды есть не что иное, как среднее значение половин обхватов грудных клеток (V см) (величина V — непрерывная), попадающих в определенные интервалы (рис. 66).

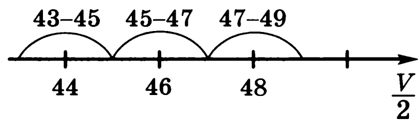


Рис. 66

Упражнения

1. На основании данных таблицы представить в виде столбчатой и круговой диаграмм распределение значений случайной величины X:

1)

X	1	2	3	4
W	0,1	0,3	0,4	0,2

2)

X	1	2	3	4	5
W	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

2. На основании данных частотной таблицы построить таблицу распределения значений величины X по относительным частотам:

1)

X	1	2	3	4	5
M	2	3	5	8	12

2)

X	1	2	3	4	5	6
M	2	5	15	20	5	3

Построить столбчатую и круговую диаграммы относительных частот распределения значений величины X.

3. Построить полигон частот и полигон относительных частот значений случайной величины X, распределение которой представлено в таблице:

1)

X	11	12	13	14	15
M	3	0	5	7	5

2)

X	23	24	25	26	27	28
M	6	5	2	3	1	3

4. Измерив рост 50 старшеклассников в сантиметрах, результаты записали в таблицу:

149	150	150	151	151	152	152	153	154	154
155	155	155	156	156	157	157	157	158	158
159	159	159	159	161	161	161	162	162	162
162	162	165	166	166	166	167	167	169	170
171	171	173	173	173	175	176	178	180	182

Сгруппировав данные по классам 145—149, 150—154, ..., 180—184, представить частотное распределение роста учащихся по этим классам с помощью: 1) таблицы; 2) полигона частот; 3) столбчатой диаграммы.

---

5. При переписи населения данные о возрасте (полном количестве лет) жильцов некоторого дома оказались следующими:
34, 31, 2, 8, 48, 40, 20, 15, 12, 21, 20, 0, 68, 39, 35, 16, 13, 9, 4, 72, 74, 75, 45, 44, 23, 18, 88, 60, 54, 30, 32, 11, 10, 5, 57, 53, 56, 24, 2, 1, 60, 59, 34, 30, 9, 7, 43, 42, 19, 1, 36, 37, 14, 13, 9, 62, 58, 19, 39, 35, 12, 8, 40,

25, 3, 33, 34, 8, 7, 4, 28, 0, 41, 29, 21, 1, 31, 27, 6, 3, 70, 56, 67, 25, 24, 2.

Разбить приведенные выше данные по классам. Представить распределение данных по классам в виде полигона частот.

6. Практическая работа.

Число страниц данной книги разбить на любое количество (желательно от 8 до 12) классов. Раскрывая книгу наугад 50 раз, проводить подсчет номеров левых открывшихся страниц с учетом их попадания в определенный класс (см. пример в таблице).

Класс	Страницы	Подсчет случаев	Частота
1	1—10	||	2
2	11—20	~~||||~~ |	6
...	...	...	...

На основании составленной частотной таблицы построить полигон частот открывшихся страниц.

Замечание. Условно следует присоединить незанумерованную страницу (слева от 1-й) к первому классу.

§ 16. Генеральная совокупность и выборка

В реальной жизни *схожие элементы некоторой совокупности сравнивают по различным признакам.* Как мы уже видели в задачах предыдущих параграфов, учащихся IX классов можно сравнивать, например, по росту, размеру одежды, успеваемости и т. д. Болты можно сравнивать по длине, диаметру, весу, материалу и т. д. Практически любой признак либо поддается непосредственному измерению, либо может получить условную числовую характеристику (см. пример с книгами в § 15). Таким образом, некоторый признак элементов совокупности можно рассматривать как случайную величину, принимающую те или иные числовые значения.

При изучении реальных явлений часто бывает невозможно обследовать все элементы совокупности. Например, практически невозможно выявить размеры обуви у всех людей планеты. А проверить, например, наличие листов некачественной фотобумаги в большой партии хотя и реально, но бессмысленно, так как полная проверка приведет к уничтожению всей партии бумаги.

В подобных случаях вместо изучения всех элементов совокупности, которую называют *генеральной совокупностью*, обследуют ее значительную часть, выбранную случайным образом. Эту часть называют *выборкой*.

Если в выборке присутствуют все значения случайной величины в тех же пропорциях, что и в генеральной совокупности, то эту выборку называют *репрезентативной* (от фр. *représentatif* — представительный).

Например, если менеджер швейной фабрики большого города хочет выяснить, в каком количестве нужно шить одежду тех или иных размеров, он должен составить репрезентативную выборку людей этого города. *Объем* ее может быть и не очень большим (например, 1000 человек), но в качестве такой выборки нельзя, например, брать только детей детского сада или только рабочих одного завода. Очевидно, микромоделью города могут послужить жильцы многоквартирного дома (или нескольких домов), в котором примерно в тех же пропорциях, что и в самом городе, проживают люди разных возрастов и разных комплекций.

Пусть $\overline{\overline{S}}$ — объем генеральной совокупности, N — объем репрезентативной выборки, в которой значения исследуемого признака распределены по частотам M_1, M_2, ..., M_k, где $\Sigma M = N$. Требуется в генеральной совокупности найти частоты S_1, S_2, ..., S_k тех же значений признака, что и в выборке ($\Sigma S = \overline{\overline{S}}$).

● По определению репрезентативной выборки

$$\frac{M_i}{N} = W_i = \frac{S_i}{\overline{\overline{S}}}, \quad (1)$$

где i — порядковый номер значения признака ($1 \leqslant i \leqslant k$). Из соотношений (1) находим $S_i = \frac{\overline{\overline{S}}}{N} M_i$ или

$$S_i = \overline{\overline{S}} W_i, \text{ где } 1 \leqslant i \leqslant k. \ \bigcirc \quad (2)$$

Задача 1. Фабрика резиновых изделий выиграла тендер на изготовление $\overline{\overline{S}} = 10\,000$ армейских противогазов. Для определения того, сколько противогазов каждого из пяти существующих размеров следует изготовить, были сделаны замеры у $N = 100$ случайным образом выбранных солдат ближайшей воинской части. Распределение размеров X по частотам M оказалось следующим:

X	0	1	2	3	4
M	5	21	47	22	5

Сколько противогазов каждого размера будет изготавливать фабрика?

Будем считать исследуемую выборку объемом $N=100$ солдат репрезентативной. Тогда в генеральной совокупности (объемом $\overline{\overline{S}}=10\,000$ солдат) количество противогазов каждого размера пропорционально количеству противогазов соответствующего размера в выборке и для каждого размера находится по формуле (2). Результаты расчетов будем записывать в таблицу:

Размер (X)	0	1	2	3	4	
Частота в выборке (M)	5	21	47	22	5	$\Sigma M=N=100$
Относительная частота $\left(W=\frac{M}{N}\right)$	0,05	0,21	0,47	0,22	0,05	$\Sigma W=1$
Количество противогазов ($\overline{\overline{S}}\cdot W$)	500	2100	4700	2200	500	$\Sigma(\overline{\overline{S}}\cdot W)=\overline{\overline{S}}=$ $=10\,000$

Ответ.

Размер	0	1	2	3	4
Количество противогазов	500	2100	4700	2200	500

В промышленности и сельском хозяйстве для определения количественного соотношения изделий разного сорта пользуются так называемым *выборочным методом*. Суть этого метода будет ясна из описания следующего опыта, теоретическую основу которого составляет *закон больших чисел*.

В коробке тщательно перемешан горох двух сортов: зеленый и желтый. Небольшой емкостью, например ложкой (рис. 67), извлекают из разных мест коробки небольшие порции гороха. В каждой порции подсчитывают число желтых (M) и чис-

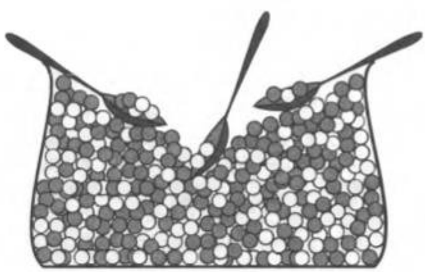


Рис. 67

ло всех (N) горошин. Для каждой порции находят относительную частоту появления желтой горошины $W=\frac{M}{N}$. Так поступают k раз (на практике обычно берут $5 \leqslant k \leqslant 10$) и каждый раз вычисляют относительную частоту. За статистическую вероятность изъятия желтой горошины из коробки принимают среднее арифметическое полученных относительных частот W_1, W_2, ..., W_k:

$$W_{\text{ср}}=\frac{W_1+W_2+\ldots+W_k}{k}.$$

Упражнения

1. Определить, какую из предложенных выборок в последнем столбце таблицы можно считать репрезентативной.

№ задания	Генеральная совокупность	Цель обследования	Выборка
1	Партия одинаковых деталей объемом 10 000 штук	Определение числа бракованных деталей в партии	1) 5 рядом лежащих деталей; 2) 5 деталей, выбранных случайным образом из разных частей партии; 3) 100 деталей, выбранных случайным образом из разных частей партии
2	Все бездомные собаки города — областного центра	Определение числа собак, больных чумкой	1) Одна собачья стая; 2) по нескольку случайным образом отловленных собак из каждого района города
3	Все экзаменационные работы в форме единого теста по математике выпускников школ города	Предварительное выявление соотношения между отличными, хорошими, удовлетворительными и плохими знаниями по математике	1) 5 работ, изъятых случайным образом из числа всех работ; 2) 50 работ, изъятых случайным образом из числа всех работ; 3) 50 работ выпускников одной школы

Продолжение

№ задания	Генеральная совокупность	Цель обследования	Выборка
4	Партия штампованных деталей объемом 100 000 штук	Определение среднего веса детали в партии	1) 2 детали; 2) 100 деталей, отштампованных последними; 3) 50 случайным образом выбранных деталей из партии
5	Бидон молока	Определение процента жирности	1) Ложка молока, взятая с поверхности по прошествии 2 ч после надоя; 2) стакан молока, вылитый из бидона после 2 ч стояния его в погребе; 3) ложка молока после тщательного перемешивания его в бидоне
6	Урожай зерна с поля площадью 1000 га	Определение урожайности зерна на этом поле	1) Урожай зерна с северного склона холма площадью 1 га; 2) среднее арифметическое урожайности с двух соседних участков площадью 1 га: северного и восточного склонов холма; 3) среднее арифметическое урожайностей с 10 участков, каждый из которых площадью 10 соток выбран на поле случайным образом

2. Рассмотреть в качестве генеральной совокупности все население большого города. В таблице указана цель статистического обследования населения и то, каким образом составлялась выборка из генеральной совокупности. Попытаться объяснить, почему составленную выборку нельзя считать репрезентативной.

№ задания	Цель обследования	Выборка
1	Выявление читательских интересов	1) Дети старшей группы детского сада; 2) курсанты роты военного училища; 3) члены одной семьи
2	Выявление любимых мелодий (песен)	1) 100 учащихся музыкальной школы; 2) 100 человек, случайным образом остановленных и опрошенных поздно вечером на улице города
3	Определение числа больных гриппом в городе в пик эпидемии	1) 100 случайным образом выбранных пациентов терапевтических кабинетов поликлиник города; 2) жильцы одного подъезда двухэтажного дома
4	Определение среднего уровня доходов населения	1) Жильцы одного подъезда пятиэтажного дома; 2) 300 случайным образом выбранных жильцов студенческого общежития; 3) все жители коттеджного района города
5	Определение наиболее ходовых размеров джинсов	1) Все студенты хореографического училища; 2) члены секции сумо
6	Определение количества домашних кошек и собак, приходящегося на душу населения в городе	1) Жильцы одного подъезда двухэтажного дома; 2) жильцы многоквартирного дома, заселенного одинокими престарелыми людьми

3. Относительная частота появления имен существительных в тексте некоторого автора близка к 0,4. Сколько (приблизительно) имен существительных встретится в случайным образом выбранном отрывке из текста этого же автора, если всего в этом отрывке 500 слов?

4. В отрывке из художественного произведения некоторого автора объемом 600 слов глаголы встречаются 72 раза. Определить примерное количество глаголов в отрывке объемом 2000 слов из текста того же автора.

5. Обувной цех должен выпустить 1000 пар кроссовок молодежного фасона. С этой целью были выявлены размеры обуви у 50 случайным образом выбранных подростков. Распределение выявленных размеров по частотам представлено в таблице:

Размер (X)	35	36	37	38	39	40	41	42
Частота (M)	3	5	6	12	11	7	4	2

Считая рассмотренную выборку репрезентативной, определить, сколько пар кроссовок каждого размера выпустит обувной цех.

6. Среди случайным образом выбранных 100 молодых людей, носящих летом кепки, провели опрос о цветовых предпочтениях для этого вида головных уборов. Результаты опроса отражены в таблице:

Цвет	Черный	Красный	Синий	Серый	Белый	Желтый	Зеленый
Частота	32	20	16	14	11	5	2

Считая рассмотренную выборку репрезентативной, высказать рекомендации швейной фабрике по количеству выпускаемых кепок каждого цвета, если фабрика должна подготовить к продаже 30 000 кепок.

§ 17. Размах и центральные тенденции

1. Размах, мода и медиана

Генеральные совокупности и выборки случайных величин иногда приходится характеризовать одним числом. На практике это бывает необходимо, например, для быстрого сравнения двух или нескольких совокупностей по общему признаку.

Рассмотрим конкретный пример.

Имеются: 1) распределение случайной величины X — числа прочитанных за каникулы книг десятью девочками по частотам M (таблица слева, с. 86); 2) распределение по частотам случайной величины Y — числа прочитанных за каникулы книг девятью мальчиками того же класса (таблица справа).

X	3	4	5	8	12
M	3	2	3	1	1

$N = \Sigma M = 10$

Y	3	4	5	6	7
M	2	4	1	1	1

$N = \Sigma M = 9$

Нужно сравнить читательские способности девочек и мальчиков этого класса. Когда в совокупности число элементов N небольшое, все значения, которые они принимают, можно для наглядности выписать в виде упорядоченного ряда чисел — последовательности значений случайной величины в порядке их возрастания. При этом каждое значение выписывается столько раз, какова его частота в совокупности. Например, заданные таблицами распределения величин X и Y могут быть записаны соответственно в виде следующих рядов:

$$3, \quad 3, \quad 3, \quad 4, \quad 4, \quad 5, \quad 5, \quad 5, \quad 8, \quad 12; \qquad (1)$$

$$3, \quad 3, \quad 4, \quad 4, \quad 4, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7. \qquad (2)$$

Для сравнения предложенных совокупностей могут быть использованы различные характеристики. Перечислим некоторые из них.

Размах (обозначается R) — разница между наибольшим и наименьшим значениями случайной величины.

Так, для совокупности (1) $R = 13 - 3 = 10$, а для совокупности (2) $R = 7 - 3 = 4$. Можно сказать, что разброс в количестве прочитанных книг у девочек больше, чем у мальчиков.

Мода (обозначают Mo) — наиболее часто встречающееся значение случайной величины.

Так, в совокупности (1) две моды: $Mo_1 = 3$ и $Mo_2 = 5$; в совокупности (2) $Mo = 4$ (см. рис. 68). Значение 4 в совокупности (2) встречается чаще других. А если учесть, что размах совокупности (2) меньше, чем совокупность (1), то можно сказать, что вторая совокупность более однородная (равномерная), чем первая.

Медиана (обозначают Me) — это так называемое серединное значение упорядоченного ряда значений случайной величины.

В ряду (1) число членов десять ($N = 10$) — четное число. Для него медиана равна среднему арифметическому двух

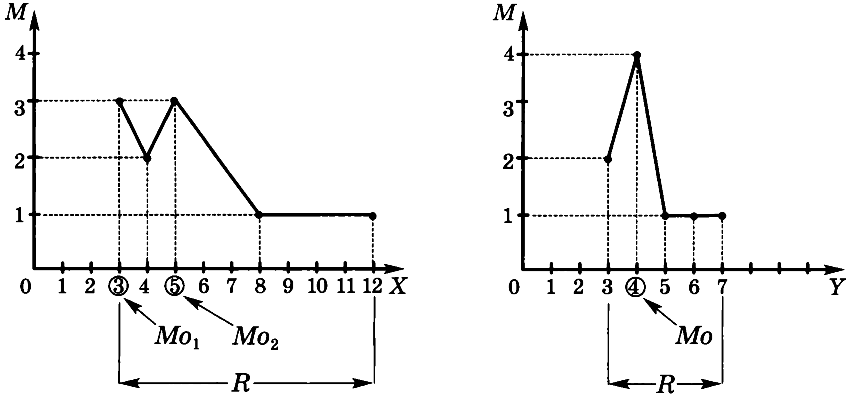


Рис. 68

центральных значений: $\left(\frac{N}{2}=\frac{10}{2}=5\right)$ — пятого (оно равно 4) и $\left(\frac{N}{2}+1=6\right)$ — шестого (оно равно 5):

$$Me=\frac{4+5}{2}=4{,}5.$$

В ряду (2) нечетное число элементов ($N=9$). Его медиана равна значению центрального $\left(\frac{N+1}{2}=\frac{9+1}{2}=5\right)$ — пятого члена ряда:

$$Me=4.$$

Можно сказать, что медиана делит упорядоченный ряд чисел на две равные по количеству элементов части:

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & & 4{,}5 & & & & & \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \uparrow & 5 & 5 & 5 & 8 & 12 \end{array}$$

медиана

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \downarrow & & & & \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

О совокупности девочек (1) можно сказать, что одна половина из них прочитала меньше 4,5 книг, а другая половина — больше 4,5 книг. В совокупности (2) одна половина мальчиков прочитала не больше 4 книг, а другая половина — не меньше 4 книг.

Задача 1. Найти размах, моду и медиану следующей совокупности:

$$-2,\ 3,\ 4,\ -3,\ 0,\ 1,\ 3,\ -2,\ -1,\ 2,\ -2,\ 1.$$

Запишем предложенные значения в виде упорядоченного ряда чисел:

$$-3,\ -2,\ -2,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4.$$

Размах $R=4-(-3)=7$, мода $Mo=-2$. Так как число элементов $N=12$ — число четное, то медиана равна среднему арифметическому значений шестого и седьмого членов упорядоченного ряда чисел:

$$Me=\frac{0+1}{2}=0{,}5.$$

Ответ. $R=7$, $Mo=-2$, $Me=0{,}5$.

2. Среднее значение

Средним значением случайной величины X (обозначается $\overline{X}$) называют среднее арифметическое всех ее значений.

Если все значения случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ различны, то

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{N}. \tag{3}$$

Если значения случайной величины $X_1, X_2, \ldots, X_k$ имеют в совокупности соответственно частоты $M_1, M_2, \ldots, M_k$, то

$$\overline{X}=\frac{X_1M_1+X_2M_2+\ldots+X_kM_k}{M_1+M_2+\ldots+M_k}. \tag{4}$$

Зная, что $\Sigma M=N$, формулу (4) можно переписать в виде

$$\overline{X}=\frac{X_1M_1+X_2M_2+\ldots+X_kM_k}{N}. \tag{4$'$}$$

Возвращаясь к примеру с изучением читательских способностей девочек и мальчиков класса, найдем по формуле (4) среднее значение предложенных совокупностей:

$$\overline{X}_{\text{д}}=\frac{3\cdot3+4\cdot2+5\cdot3+8\cdot1+12\cdot1}{3+2+3+1+1}=\frac{52}{10}=5{,}2,$$

$$\overline{X}_{\text{м}}=\frac{3\cdot2+4\cdot4+5\cdot1+6\cdot1+7\cdot1}{2+4+1+1+1}=\frac{40}{9}\approx4{,}4.$$

Так как $\overline{X}_{\text{д}}>\overline{X}_{\text{м}}$, можно говорить, что за один и тот же промежуток времени девочки класса в среднем читают больше книг, чем мальчики.

Задача 2. На соревнованиях по фигурному катанию 2 фигуристки получили (по шестибалльной шкале) оценки судей, представленные в таблице:

Номер фигуристки	Номер судьи								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4,8	5,6	4,9	5,2	4,7	4,9	4,9	4,8	4,7
2	5,1	4,2	5,0	4,9	5,0	5,1	5,0	5,1	5,0

Которая из фигуристок выступила лучше?

Запишем в таблицы распределение по частотам оценок X и Y, выставленных соответственно первой и второй фигуристкам:

X	4,7	4,8	4,9	5,2	5,6
M	2	2	3	1	1

$\Sigma M = N = 9$

Y	4,2	4,9	5,0	5,1
M	1	1	4	3

$\Sigma M = N = 9$

Найдем среднее значение оценок каждой из фигуристок:

$$\overline{X} = \frac{4{,}7 \cdot 2 + 4{,}8 \cdot 2 + 4{,}9 \cdot 3 + 5{,}2 \cdot 1 + 5{,}6 \cdot 1}{9} = \frac{44{,}5}{9} \approx 4{,}94,$$

$$\overline{Y} = \frac{4{,}2 \cdot 1 + 4{,}9 \cdot 1 + 5{,}0 \cdot 4 + 5{,}1 \cdot 3}{9} = \frac{44{,}4}{9} \approx 4{,}93.$$

Получаем $\overline{X} > \overline{Y}$, хотя очевидно, что у второй фигуристки почти все оценки больше 5,0, а у первой — меньше 5,0. При этом сравнение в пользу второй фигуристки выглядит несправедливым. Такой результат получен, скорее всего, из-за необъективности 2-го судьи, завысившего по сравнению с остальными судьями оценку первой фигуристке и занизившего оценку второй фигуристке.

Для большей объективности сравнения результатов в последние годы на международных соревнованиях из совокупности баллов каждого фигуриста отбрасывают наибольшее и наименьшее значения.

После отбрасывания наибольшего и наименьшего значений из совокупности баллов каждой фигуристки имеем:

$$\overline{X}' = \frac{4{,}7 \cdot 1 + 4{,}8 \cdot 2 + 4{,}9 \cdot 3 + 5{,}2 \cdot 1}{7} = \frac{34{,}2}{7} \approx 4{,}89,$$

$$\overline{Y}' = \frac{4{,}9 \cdot 1 + 5{,}0 \cdot 4 + 5{,}1 \cdot 2}{7} = \frac{35{,}1}{7} \approx 5{,}01.$$

Так как $\overline{X}' < \overline{Y}'$, считаем, что вторая фигуристка выступала лучше первой. ◁

В книгах по статистике моду, медиану и среднее объединяют одним термином — *меры центральной тенденции* (или, короче, *центральные тенденции*), подчеркивая тем самым возможность измерить, охарактеризовать совокупность одним числом, к которому стремятся все ее значения.

Не для каждой совокупности имеет смысл формально находить центральные тенденции. Например, если исследуется совокупность

$$20, 20, 80, 1150 \tag{5}$$

годовых доходов четырех людей (в тыс. р.), то очевидно, что ни мода (20), ни медиана (50), ни среднее (635) не могут выступать в роли единой характеристики всех значений. Это объясняется тем, что размах совокупности (1130) соизмерим с наибольшим ее значением.

В данном случае можно было искать центральные тенденции, например, части совокупности (5):

$$20, 20, 80,$$

условно назвав ее выборкой годовых доходов малооплачиваемой части населения.

Если в выборке *среднее* значение существенно отличается от *моды*, то его неразумно выбирать в качестве типичного представителя совокупности данных (чем больше значение *моды* отличается от *среднего*, тем «более несимметричен» полигон частот совокупности).

Медиана имеет свойство, значимое для решения прикладных задач: сумма абсолютных величин отклонений от нее является для рассматриваемой совокупности минимальной.

Упражнения

1. Найти размах, моду и медиану совокупности значений некоторой случайной величины X:

1) 1, 1, 2, 2, 2, 3, 5, 5, 6, 6, 6, 9;

2) -4, -2, -2, -1, 0, 2, 2, 2, 2, 5, 7.

Построить полигон частот значений величины X. Указать размах и моду совокупности.

2. Найти размах, моду и медиану совокупности значений величины X:

1)

X	2	3	4	5
M	3	4	1	3

2)

X	−1	2	3	5	6
M	2	3	4	4	1

Построить полигон частот значений величины X. Указать на нем размах, моду и медиану совокупности.

3. Найти размах, моду и медиану выборки:

1) 1, 3, −2, 4, −2, 0, 2, 3, 1, −2, 4;

2) 0,2; 0,4; 0,1; 0,5; 0,1; 0,2; 0,3; 0,5; 0,4; 0,6.

4. Найти среднее значение выборки:

1) 3, 4, 1, 2, 5;

2) 2, −5, 4, −3, −2, 1;

3) −2, −2, 3, 3, 3, 5, 5;

4) 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6.

5. Найти среднее значение случайной величины X:

1)

X	−1	2	3	5
M	3	4	5	2

2)

X	0	1	3	5	6
M	4	5	6	3	2

Построить полигон частот значений величины X и найти среднее значение совокупности.

6. При определении различными способами плотности материала, из которого изготовлена деталь, были получены следующие данные:

6,98 г/см^3, 7,04 г/см^3, 7,01 г/см^3, 6,97 г/см^3, 7,00 г/см^3.

Найти среднее арифметическое этой совокупности. Высказать предположение о материале, из которого изготовлена деталь.

7. Педагогический стаж восьми учителей школы, работающих в старших классах одной школы, следующий:

5 лет, 8 лет, 15 лет, 12 лет, 17 лет, 14 лет, 18 лет, 9 лет.

Найти среднее и медиану этой выборки.

---

8. Девочки девятого класса на уроке физкультуры при прыжках взяли высоты, величины которых (в см) учитель записал в журнал:

90, 125, 125, 130, 130, 135, 135, 135, 140, 140, 140.

Какая высота прыжка наилучшим образом характеризует спортивную подготовку девушек класса?

9. В таблице приведены данные о рабочем стаже (в годах) сотрудников лаборатории. Найти среднее, моду и медиану рассматриваемой совокупности.

Стаж работы	1	2	4	5	7	10	11	12	16	19	20	21	22	25
Число сотрудников	2	1	4	3	4	2	3	1	2	5	3	1	1	2

§ 18. Нормальное распределение

Задача. Значения размеров одежды (X) и обуви (Y) тысячи девятиклассниц школ микрорайона и распределение их по частотам представлены в таблицах:

X	38	40	42	44	46	48	50
M	18	79	215	375	213	81	19

Y	33	34	35	36	37	38	39	40
M	6	48	139	309	305	141	46	6

Построить полигоны частот заданных совокупностей.

▶ Полигон частот величины X представлен на рисунке 69, *а*, а величины Y — на рисунке 69, *б*. ◁

Обнаружено, что многие признаки различных явлений природы и техники (рост, вес живых организмов одного вида, результаты измерений однотипных технических изделий, дальность полета снарядов при стрельбе по цели из одного и того же орудия и др.) имеют схожее с представленными на рисунке 69 распределение своих числовых значений по частотам. Эти распределения называют *нормальными распределениями*. В рассмотренной задаче этого параграфа, а также при изучении совокупностей роста гимнасток (§ 14), размеров обуви девятиклассников (§ 15), размеров противогазов (§ 16) мы имели дело с нормальным распределением значений случайных величин.

Проведем через точки, отмеченные на рисунке 69, плавные кривые (рис. 70). Эти кривые называют *кривыми нормального распределения*. Заметим, что *кривые нормального распределения симметричны относительно вертикальных прямых, проходящих через средние значения* ($\overline{X}=44$ и $\overline{Y}=36{,}5$) *рассматриваемых совокупностей.*

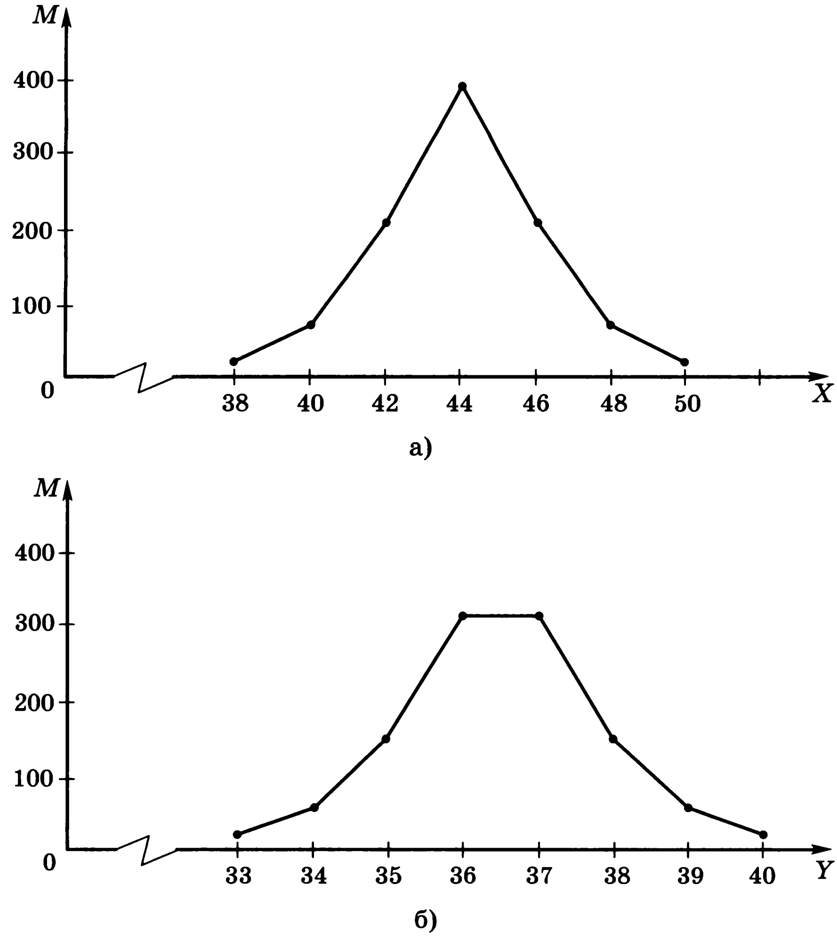


Рис. 69

Примером реального получения кривой нормального распределения может послужить результат опыта, проделанного английским ученым Ф. Гальтоном (1822—1911).

Опыт Гальтона. В доску вбиваются в «шахматном порядке» гвозди (рис. 71). Доска устанавливается с небольшим наклоном к горизонтальной поверхности. В верхней части доски делается воронка, через которую пропускаются одинаковые шарики. Расстояние между соседними гвоздями везде одинаково и чуть больше диаметра шарика.

Пройдя через воронку, шарик отталкивается от первого верхнего гвоздя и случайным образом огибает его либо слева, либо справа. Аналогично он поступает с каждым нижним гвоздем, встречающимся на его пути (с вероятностью,

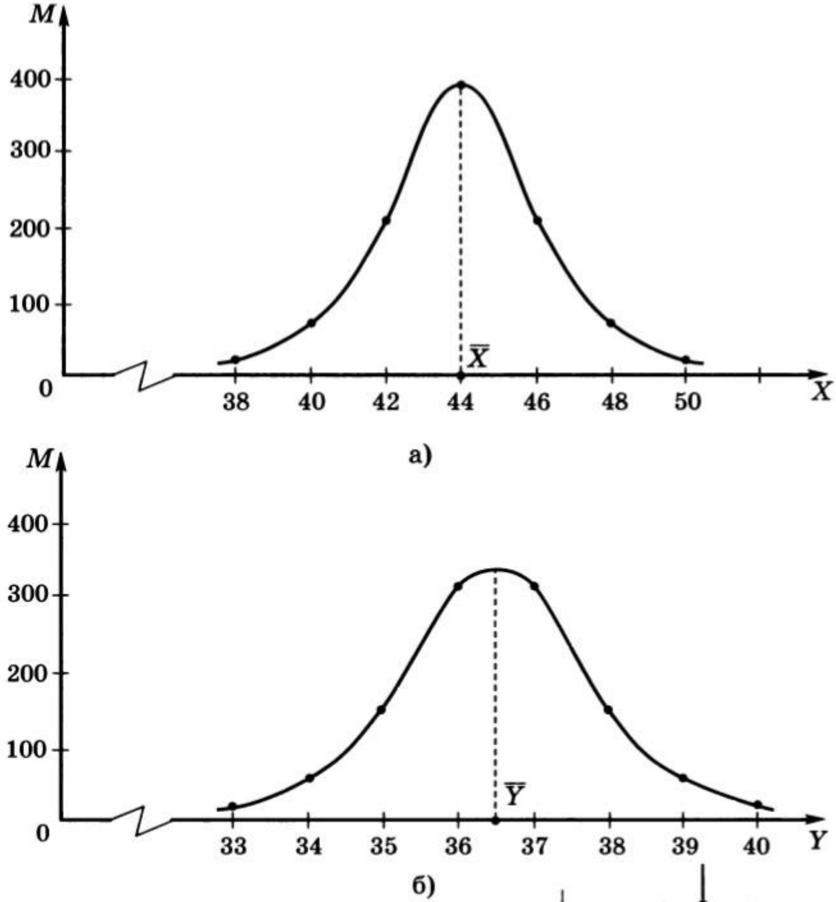


Рис. 70

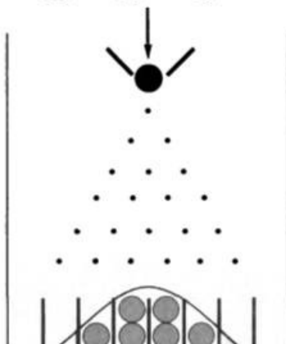


Рис. 71

близкой к $\frac{1}{2}$, огибает его либо слева, либо справа). Пройдя все ряды гвоздей, шарик попадает в один из вертикальных пеналов-накопителей.

Если число рядов гвоздей значительно увеличить и запустить много шариков, можно заметить, что кривая, огибающая верхний ряд шариков в пеналах, имеет вертикальную ось симметрии и напоминает кривую нормального распределения.

Упражнения

1. Построить полигон частот: 1) размеров женской обуви (см. таблицу слева); 2) размеров мужской обуви (см. таблицу справа). Убедиться в том, что распределение частот близко к нормальному распределению. Провести на основании полигона кривую нормального распределения и перечислить ее свойства. Найти среднее значение выборки.

Женщины					
22,5	24	23,5	23	24,5	23
23,5	24,5	22,5	23,5	25,5	25
25,5	22	24	25	23,5	21
23	24,5	23	24,5	23	24
25	24	21,5	23,5	24,5	22,5
22	23,5	26,5	23,5	25	26
24,5	23	24	24,5	22,5	24
23,5	24	23	25	24	22
25,5	21,5	24,5	26	25,5	23,5
22,5	24	23	22,5	24	25

Мужчины					
26	28,5	27,5	29,5	26,5	30,5
27,5	27	29	27	28,5	27,5
28	25	26	28	30	27
26,5	27,5	28	29,5	26,5	29
28	29	27	26,5	28,5	27,5
27,5	28	28	25,5	29	28
26,5	27,5	29,5	27,5	26	30
29,5	25,5	27	28,5	28	27
27	28,5	29	26	26,5	28,5
28	27,5	28,5	27,5	29	27

2. Практическая работа.

На основании опроса 50 случайным образом выбранных старшеклассников школы составить таблицу и полигон частот: 1) времени (в мин), затрачиваемого на дорогу от дома до школы; 2) роста (в см) — отдельно для девочек и мальчиков. Убедиться в близости распределения частот рассматриваемых величин к нормальному. Найти среднее значение совокупности значений изучаемой случайной величины.

§ 19. Отклонение от среднего и дисперсия

В § 17 рассматривалось сравнение совокупностей значений случайной величины с помощью центральных тенденций. Проанализируем одну из ситуаций, в которой такое сравнение выполнить невозможно.

На место токаря претендуют двое рабочих. Для каждого из них установили испытательный срок, в течение которого они должны были изготовить одинаковые детали. Результаты работы претендентов представлены в таблице:

День недели	Дневная выработка	
	первого рабочего (X)	второго рабочего (Y)
Понедельник	52	61
Вторник	54	40
Среда	50	55
Четверг	48	50
Пятница	46	44
	$\Sigma X = 250$	$\Sigma Y = 250$

Каждый из рабочих за 5 дней изготовил 250 деталей, значит, средняя производительность труда за день у обоих рабочих одинаковая:

$$\overline{X} = \overline{Y} = \frac{250}{5} = 50 \text{ (дет./день)}.$$

Моды у предложенных совокупностей отсутствуют, а медианы одинаковые (50 и 50).

Возникает вопрос: «Кого из этих рабочих предпочтительнее взять на работу?» В данном случае в качестве критерия сравнения совокупностей может выступать *стабильность* производительности труда рабочего. Ее можно оценивать с помощью отклонений от среднего значения элементов совокупности.

> *Отклонением от среднего* называют разность между рассматриваемым значением случайной величины и средним значением всей совокупности.

Например, если значение величины $X_1 = 52$, а значение среднего $\overline{X} = 50$, то отклонение X_1 от среднего будет равно $X_1 - \overline{X} = 52 - 50 = 2$.

Очевидно, отклонение от среднего может быть как положительным, так и отрицательным числом. Нетрудно показать, что *сумма отклонений всех значений совокупности от среднего значения равна нулю*. Поэтому характеристикой стабильности элементов совокупности может служить *сумма квадратов отклонений от среднего*.

Из предложенной ниже таблицы видно, что у второго рабочего сумма квадратов отклонений от среднего больше, чем у первого рабочего:

$$\Sigma(X-\overline{X})^2<\Sigma(Y-\overline{Y})^2.$$

День недели	Значение случайной величины		Отклонение от среднего $\overline{X}=\overline{Y}=50$		Квадраты отклонений	
	X	Y	$X-\overline{X}$	$Y-\overline{Y}$	$(X-\overline{X})^2$	$(Y-\overline{Y})^2$
Понедельник	52	61	2	11	4	121
Вторник	54	40	4	−10	16	100
Среда	50	55	0	5	0	25
Четверг	48	50	−2	0	4	0
Пятница	46	44	−4	−6	16	36
Сумма	**250**	**250**	**0**	**0**	**40**	**282**

На практике это означает, что второй рабочий имеет нестабильную производительность труда: в какие-то дни работает не в полную силу, а в какие-то наверстывает упущенное, что всегда сказывается на качестве продукции. Очевидно, что работодатель предпочтет взять на место токаря первого рабочего (у которого сумма квадратов отклонений от средней производительности меньше).

Если бы рабочие работали разное количество дней и произвели в среднем одинаковое число деталей, то стабильность работы каждого из них можно было бы оценить по величине *среднего арифметического суммы квадратов отклонений*. Такая величина называется *дисперсией* (от лат. *dispersus* — рассеянный, рассыпанный) и обозначается буквой D.

Для случайной величины X, принимающей N различных значений и имеющей среднее значение $\overline{X}$, дисперсия находится по формуле

$$D=\frac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\ldots+(X_N-\overline{X})^2}{N}. \quad (1)$$

Задача 1. Два токаря вытачивали одинаковые детали, причем первый работал полную неделю, а второй — 4 дня. Сведения об их дневной выработке представлены в таблице:

День недели	Дневная выработка	
	I токаря (X)	II токаря (Y)
Понедельник	53	52
Вторник	54	46
Среда	49	53
Четверг	48	49
Пятница	46	—

Сравнить стабильность работы токарей.

Найдем средние значения величин X и Y:

$$\overline{X}=\frac{53+54+49+48+46}{5}=\frac{250}{5}=50,$$

$$\overline{Y}=\frac{52+46+53+49}{4}=\frac{200}{4}=50.$$

Очевидно, $\overline{X}=\overline{Y}$.

С помощью таблицы найдем суммы квадратов отклонений от средних значений величин X и Y.

День недели	Значение случайной величины		Отклонение от среднего		Квадрат отклонений от среднего	
	X	Y	$X-50$	$Y-50$	$(X-50)^2$	$(Y-50)^2$
Понедельник	53	52	3	2	9	4
Вторник	54	46	4	−4	16	16
Среда	49	53	−1	3	1	9
Четверг	48	49	−2	−1	4	1
Пятница	46	—	−4	—	16	—

Сумма: 46 30

$$D_X=\frac{46}{5}=9,2;\ D_Y=\frac{30}{4}=7,5.\ D_X>D_Y.$$

Ответ. Второй токарь работает стабильнее первого.

Если значения случайной величины $X_1, X_2, \ldots, X_k$ повторяются с частотами $M_1, M_2, \ldots, M_k$ соответственно, то дисперсию величины X можно вычислить по формуле

$$D=\frac{(X_1-\overline{X})^2M_1+(X_2-\overline{X})^2M_2+\ldots+(X_k-\overline{X})^2M_k}{M_1+M_2+\ldots+M_k},$$

$$\text{где } \overline{X}=\frac{X_1\cdot M_1+X_2\cdot M_2+\ldots+X_k\cdot M_k}{M_1+M_2+\ldots+M_k}.$$

Задача 2. Случайная величина X имеет распределение по частотам M, представленное в таблице.

X	2	5	6	12
M	1	2	3	1

Найти ее дисперсию.

▶ $$\overline{X}=\frac{2\cdot1+5\cdot2+6\cdot3+12\cdot1}{1+2+3+1}=\frac{2+10+18+12}{7}=\frac{42}{7}=6.$$

По формуле (1) найдем дисперсию:

$$D=\frac{(2-6)^2\cdot1+(5-6)^2\cdot2+(6-6)^2\cdot3+(12-6)^2\cdot1}{1+2+3+1}=$$

$$=\frac{16+2+0+36}{7}=\frac{54}{7}\approx7{,}7.$$

Ответ. $D\approx7{,}7$. ◁

Упражнения

1. Найти дисперсию выборки: 1) 10 см, 12 см, 7 см, 11 см; 2) 16 г, 14 г, 13 г, 17 г; 3) 11 с, 14 с, 11 с, 12 с, 12 с; 4) 5 м, 13 м, 8 м, 12 м, 12 м.

2. Найти дисперсию совокупности значений случайной величины X, заданной частотным распределением:

1)

X	2	3	4	6
M	3	2	2	3

2)

X	−1	2	3	4	5
M	3	1	2	3	1

3. Сравнить дисперсии двух выборок, имеющих одинаковые средние значения: 1) 6, 10, 7, 8, 9 и 8, 9, 5, 10; 2) 5, 12, 7, 8, 18 и 17, 6, 11, 7, 9, 10.

4. Сравнить дисперсии выборок, имеющих разные средние значения: 1) 4, 6, 8, 9, 8 и 6, 8, 10, 12, 9; 2) 6, 3, 4, 8, 9 и 2, 6, 3, 7, 5, 7.

5. Двух футболистов, участвующих в играх пяти сезонов и забивших одинаковое количество голов (см. таблицу), сравнить по стабильности результатов.

Условный номер сезона	1	2	3	4	5
Число голов, забитых 1-м футболистом	18	23	19	17	23
Число голов, забитых 2-м футболистом	19	16	22	23	20

6. Двух футболистов, один из которых участвовал в пяти игровых сезонах, а другой — в шести (см. таблицу), сравнить по результативности и стабильности в забивании голов.

Условный номер сезона	1	2	3	4	5	6
Число голов, забитых 1-м футболистом	17	21	20	16	15	19
Число голов, забитых 2-м футболистом	—	17	20	18	21	14

§ 20. Среднее квадратичное отклонение и правило трех сигм

1. Среднее квадратичное отклонение

Пусть величина X имеет некоторую размерность (например, сантиметры). Тогда ее среднее значение $\overline{X}$ и отклонение от среднего $X-\overline{X}$ имеют ту же размерность, что и сама величина (см). Квадрат же отклонения $(X-\overline{X})^2$ и дисперсия D имеют размерности квадрата этой величины (см^2).

Для оценки степени отклонения от среднего значения удобно иметь дело с величиной той же размерности, что и сама величина X. С этой целью используют значения корня квадратного из дисперсии $\sqrt{D}$.

Корень квадратный из дисперсии называют *средним квадратичным отклонением* и обозначают σ (греческая буква «сигма»):

$$\sigma=\sqrt{D}. \quad (1)$$

Задача 1. Распределение по частоте величины X — числа забитых голов десятью игроками футбольной команды за период соревнований показано в таблице. Найти среднее квадратичное отклонение от среднего числа забитых голов.

X	0	1	2	3
M	4	2	3	1

Результаты последовательных вычислений будем заносить в таблицу:

X	0	1	2	3
M	4	2	3	1
$X \cdot M$	0	2	6	3
$X-\overline{X}$	−1,1	−0,1	0,9	1,9
$(X-\overline{X})^2$	1,21	0,01	0,81	3,61
$(X-\overline{X})^2 \cdot M$	4,84	0,02	2,43	3,61

$\Sigma M = 10.$

$$\overline{X}=\frac{\Sigma(X \cdot M)}{\Sigma M}=\frac{11}{10}=1,1$$

$$D=\frac{\Sigma((X-\overline{X})^2 \cdot M)}{\Sigma M}=\frac{4,84+0,02+2,43+3,61}{10}=\frac{10,9}{10}=1,09 \text{ (гол.}^2\text{)}.$$

$$\sigma=\sqrt{D}=\sqrt{1,09}\approx 1,044 \text{ (гол.)}.$$

Ответ. $\sigma \approx 1,044$ гола.

Задача 2. Продавец обуви имеет возможность выбрать, в каком из двух мест (в точке A или точке B) поставить торговую палатку. В первую очередь его интересует объем продаж, а во вторую — стабильность ежедневных продаж. Продавец провел исследование: по рабочим дням в январе он торговал в точке A, а в феврале — в точке B. Результаты продаж фиксировались, после чего были составлены две таблицы распределения величины X_A и величины X_B — количества проданных за день пар обуви в точках A и B соответственно.

Какой торговой точке следует отдать предпочтение?

X_A	1	2	3	4	5
M_A	2	7	7	4	2

$\Sigma M_A = 22$

X_B	1	2	3	4	6
M_B	3	5	6	5	1

$\Sigma M_B = 20$

Очевидно, в январе было 22 рабочих дня ($\Sigma M_A = 22$), а в феврале — 20 ($\Sigma M_B = 20$). Найдем величины среднесуточных продаж обуви в точках A и B:

$$\overline{X}_A = \frac{\Sigma(X_A \cdot M_A)}{\Sigma M_A} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2}{22} = \frac{63}{22} \approx 2{,}86;$$

$$\overline{X}_B = \frac{\Sigma(X_B \cdot M_B)}{\Sigma M_B} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 1}{20} = \frac{57}{20} = 2{,}85.$$

Среднее значение суточных продаж оказалось практически одинаковым (примем $\overline{X}_A = \overline{X}_B = \overline{X} = 2{,}9$), значит, предпочтение следует отдать точке с более стабильной торговлей. Для этого нужно сравнить средние квадратичные отклонения совокупностей значений X_A и X_B. Результаты вычислений будем последовательно заносить в таблицы:

X_A	1	2	3	4	5
M_A	2	7	7	4	2
$X_A - \overline{X}$	−1,9	−0,9	0,1	1,1	2,1
$(X_A - \overline{X})^2$	3,61	0,81	0,01	1,21	4,41
$(X_A - \overline{X})^2 \cdot M_A$	7,22	5,67	0,07	4,84	8,82

X_B	1	2	3	4	6
M_B	3	5	6	5	1
$X_B - \overline{X}$	−1,9	−0,9	0,1	1,1	3,1
$(X_B - \overline{X})^2$	3,61	0,81	0,01	1,21	9,61
$(X_B - \overline{X})^2 \cdot M_B$	10,83	4,05	0,06	6,05	9,61

$$D_A = \frac{\Sigma((X_A - \overline{X})^2 \cdot M_A)}{\Sigma M_A} = \frac{7{,}22 + 5{,}67 + 0{,}07 + 4{,}84 + 8{,}82}{22} = \frac{26{,}62}{22} \approx$$

$$\approx 1{,}21 \text{ (пар}^2\text{)},$$

$$\sigma_A = \sqrt{D_A} \approx \sqrt{1{,}21} = 1{,}1 \text{ (пар)},$$

$$D_B = \frac{\Sigma((X_B - \overline{X})^2 \cdot M_B)}{\Sigma M_B} = \frac{10{,}83 + 4{,}05 + 0{,}06 + 6{,}05 + 9{,}61}{20} = \frac{30{,}6}{20} =$$

$$= 1{,}53 \text{ (пар}^2\text{)};$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{1{,}53} \approx 1{,}24 \text{ (пар)}.$$

Так как $\sigma_A < \sigma_B$, то торговля в точке A более стабильная, чем в точке B.

Ответ. Торговая точка A предпочтительнее для организации в ней торговли, чем точка B.

Замечание. Дисперсию и среднее квадратичное отклонение называют в статистике *мерами рассеяния* значений случайной величины около среднего значения.

2. Правило трех сигм

В курсе теории вероятностей доказывается, что 68% $\left(\text{или примерно } \frac{2}{3}\right)$ всех значений нормально распределенной слу-

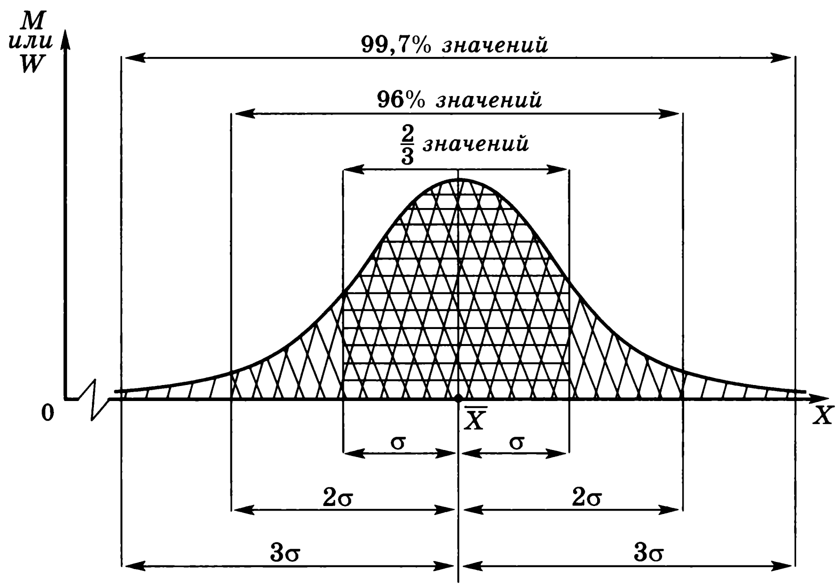


Рис. 72

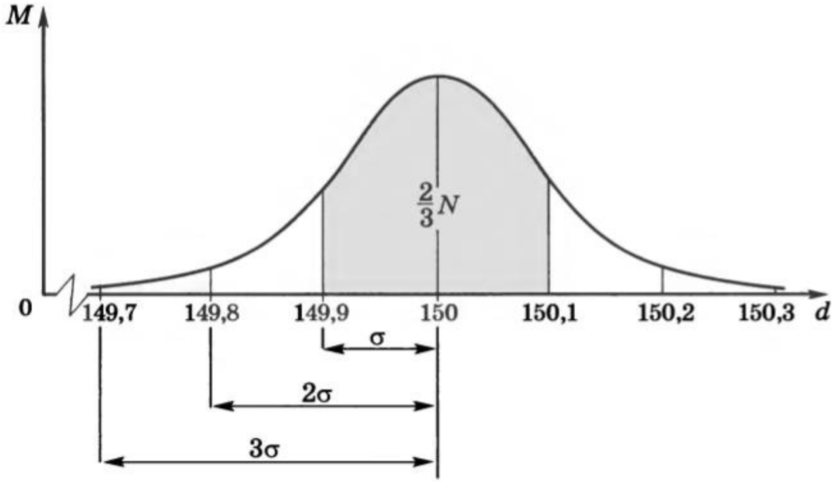


Рис. 73

чайной величины X имеют отклонения от среднего значения по абсолютной величине, не превосходящие среднего квадратичного отклонения σ, а 96% всех значений — не превосходящие 2σ. Доказывается также, что практически все ее значения (точнее, 99,7% всех значений) имеют отклонения от среднего, не превосходящие по абсолютной величине утроенного среднего квадратичного отклонения 3σ. Эта закономерность называется *правилом трех сигм* (рис. 72).

Известно, что результаты измерений в массовом производстве (длина, диаметр, масса конкретных видов продукции) — непрерывные случайные величины, имеющие нормальное распределение. Например, измеренные диаметры d партии труб (объем партии равен N), изготовленных трубопрокатным цехом, оказались в диапазоне от 149,7 мм до 150,3 мм. Это означает, что среднее значение их совокупности

$$\bar{d} = \frac{149{,}7 + 150{,}3}{2} = 150 \text{ (мм)};$$

размеры распределены нормально со средним квадратичным отклонением от $\bar{d}$, равным $\sigma = \frac{150 - 149{,}7}{3} = 0{,}1$ (мм), что проиллюстрировано на рисунке 73. Из сказанного можно сделать вывод, что примерно $\frac{2}{3}$ всех труб имеет диаметры от 149,9 до 150,1 мм, а значительная их часть (96%) имеет диаметры от 149,8 до 150,2 мм.

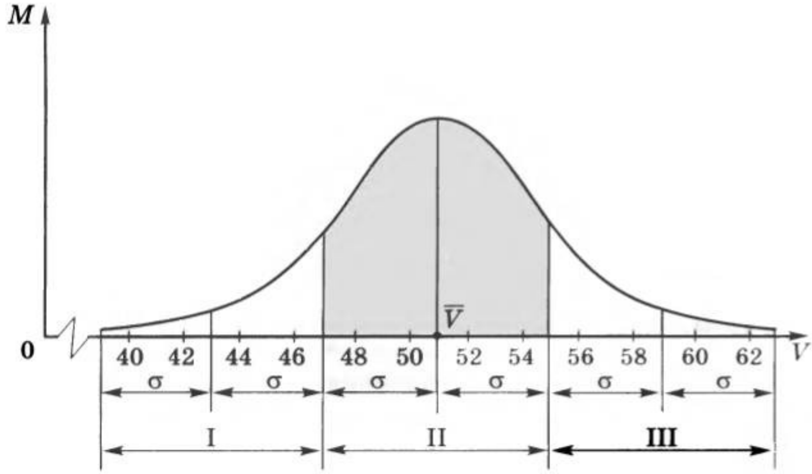


Рис. 74

Задача 3. В некоторых международных играх по разным видам спорта должны участвовать $N = 600$ спортсменов. Известно, что размеры одежды V участников игр от 40-го (у гимнасток) до 62-го (у тяжелоатлетов). Оргкомитет игр решил подарить участникам майки с эмблемой игр. Швейной фабрике был сделан заказ на пошив маек свободного покроя трех условных размеров: I, II и III. Какие стандартные размеры (от 40-го до 62-го) разумно объединить в условные размеры I, II и III и сколько маек каждого из этих трех размеров следует сшить?

▶ Считая, что размеры одежды V спортсменов имеют нормальное распределение, найдем среднее значение совокупности размеров (рис. 74):

$$\overline{V} = \frac{62 + 40}{2} = 51.$$

Согласно правилу трех сигм считаем, что практически вся совокупность маек от 40-го до 62-го размеров попадет в интервал длиной 6σ. При этом в центральную часть распределения (см. рис. 74) попадают размеры 48, 50, 52 и 54, им разумно присвоить условный размер II. На эти размеры всей совокупности будет приходиться примерно $\frac{2}{3}$ маек, т. е. $600 \cdot \frac{2}{3} = 400$ маек. В I условный размер войдут 40, 42, 44 и 46-й размеры, в III — 56, 58, 60 и 62-й размеры. Очевидно, на каждый из I и III условных размеров приходится

$\left(1-\frac{2}{3}\right):2=\frac{1}{6}$ от всей совокупности маек, т. е. по $600\cdot\frac{1}{6}=$ $=100$ маек.

Ответ. I размер (40—46) — 100 маек; II размер (48—54) — 400 маек; III размер (56—62) — 100 маек. ◁

Упражнения

1. Найти среднее квадратичное отклонение от среднего значения элементов выборки: 1) 3 кг, 5 кг, 5 кг, 8 кг, 4 кг; 2) 12 м, 10 м, 7 м, 12 м, 9 м.

2. Найти среднее квадратичное отклонение величины X, заданной частотным распределением:

1)

X	2	3	4	6
M	2	2	1	3

2)

X	−5	−2	2	3
M	2	3	4	2

3. Определить, какая выборка:

$$-1,\ 0,\ 2,\ 3,\ 5,\ 3 \text{ или } -5,\ -3,\ 0,\ -3,\ 1\ —$$

имеет меньшее рассеяние данных около своего среднего значения.

4. Были произведены замеры диаметров d оснований цилиндров в большой партии стальных заготовок. Замеры производились дважды — двумя различными измерительными приборами. Из результатов измерений (с точностью до 1 мм) первым прибором были выбраны случайным образом 10 замеров (см. таблицу слева), аналогичным образом были выбраны 10 замеров, сделанных вторым прибором (см. таблицу справа).

d_1	58	59	60	61	62
M_1	1	2	4	2	1

d_2	59	60	61	62
M_2	2	5	2	1

Выявить предпочтительность использования в дальнейших измерениях того или иного прибора, взяв за критерий оценки качества измерения меру рассеяния полученных данных (сделанные выборки считать репрезентативными).

5. Используя данные таблиц, приведенных в задаче из текста § 18, проверить справедливость правила трех сигм.

Упражнения к главе III

1. На стол бросаются два игральных октаэдра (рис. 75), грани каждого из которых занумерованы числами от 1 до 8. Составить таблицу распределения по вероятностям значений случайной величины X — суммы очков на верхних гранях октаэдров.

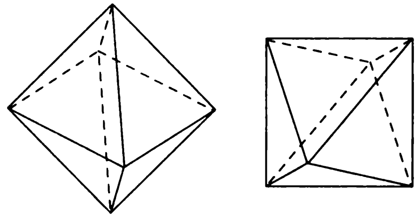


Рис. 75

2. Для определения соотношений размеров рабочих халатов для женщин, работающих на различных предприятиях города, выявили размеры у 49 случайным образом выбранных женщин крупнейшего комбината и составили таблицу:

48	48	50	54	48	48	54
50	46	50	50	50	48	52
52	48	48	52	54	46	58
46	52	56	50	52	50	50
52	50	48	50	50	44	52
48	42	54	46	56	56	48
44	48	46	48	54	54	46

1) Сколько халатов каждого размера следует сшить, если планируется шить по одному халату для каждой из работающих в производстве города 73 500 женщин? 2) На основании данных таблицы построить полигон частот размеров женской одежды. 3) Найти моду, медиану, среднее и размах выборки.

---

3. Среди трех совокупностей, представленных таблицами распределения, выявить ту совокупность, значения которой имеют меньшее рассеяние около своего среднего.

X	1	2	4	6
M	2	1	3	2

Y	−2	0	1	2	3
M	2	3	2	2	1

Z	−5	−4	−2	3
M	1	3	3	1

ОТВЕТЫ

Глава I

§ 1. 1. 11 (а, б, в, ж, и, к, о, с, у, э, я). **3.** 1) Ты, вы; 2) он, но, на, ан. **4.** 1) 3 (А, Д, Ж); 2) 5 (В, Е, Ж, З, К). **5.** 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144. **6.** 1) 400; 2) 625; 3) 961; 4) 2500. **7.** 1) 13-м; 2) 15-м; 3) 18-м; 4) 60-м. **8.** 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55. **9.** 1) 210; 2) 231; 3) 561; 4) 595. **10.** 1) 35; 2) 51.

§ 2. 1. 1) Один; 2) один. **2.** Двумя. **3.** Три. **4.** 1) 23, 32; 2) 23, 32, 22, 33. **5.** Три: п, о; п, л; о, л. **6.** 1) Тремя; 2) одним; 3) тремя. **7.** Шестью. **8.** Шесть: АМС; АСМ; САМ; СМА; МАС; МСА. **9.** Девять: бб; кк; сс; бк; кб; бс; сб; кс; ск. **10.** 1) 23, 32, 24, 42, 34, 43; 2) 23, 32, 24, 42, 34, 43, 22, 33, 44. **11.** 1) 10, 12, 20, 21; 2) 10, 12, 20, 21, 11, 22. **12.** 111, 112, 121, 122, 211, 221, 222. **13.** 1) 102, 120, 201, 210; 2) 100, 101, 102, 110, 111, 112, 120, 121, 122, 200, 201, 202, 210, 211, 212, 220, 221, 222. **14.** 39. **15.** 1) КОЛ, ПОЛ, КЛОП; 2) КОМ, КОН, КОТ, КОК, КОМА, ..., КОМБИНАТОР, ..., КАБИНА, ..., ОР, ОКО, ...

§ 3. 4. 6. **5.** 12. **6.** 15. **7.** 16. **8.** 25. **9.** 42. **10.** 56. **11.** 1) 36; 2) 30. **12.** 1) 30; 2) 25.

§ 4. 1. 1) 3; 2) 6; 3) 10. **2.** 1) 6; 2) 12; 3) 20. **3.** х, р; х, а; х, г; к, р; к, а; к, г. **4.** х, р; х, г; к, р; к, г; с, р; с, г. **7.** 1) 8; 2) 4. **8.** 1) 64; 2) 48. **9.** 1) 125; 2) 60. **10.** 1) 100; 2) 48. **11.** 100. **12.** 120. **13.** 1) 720; 2) 990. **14.** 1) 72; 2) 504; 3) 3024. **15.** 24. **16.** 720. **17.** 1) 66; 2) 666. **18.** 1) 276 способами; 2) 300 способами.

§ 5. 1. 1) Шестью; 2) ста двадцатью. **2.** 1) 720; 2) 5040. **3.** Двадцатью четырьмя. **4.** 24. **5.** 1) 6; 2) 6. **6.** 1) Шестью; 2) двадцатью четырьмя. **7.** 6. **8.** 24. **9.** 1) 600; 2) 48; 3) 12; 4) 56; 5) $\frac{1}{210}$; 6) $\frac{1}{336}$. **10.** 1) $x=3$; 2) $x=4$. **11.** 1) P_4; 2) $P_5 \cdot 2$. **12.** $P_3 \cdot 2$. **13.** $P_4 \cdot 2$. **14.** 1) $\frac{P_3}{P_2}$; 2) $\frac{P_4}{P_3}$; 3) $\frac{P_5}{P_3}$. **15.** $\frac{P_6}{P_2}$. **16.** $\frac{P_6}{P_3}$. **17.** 1) 1; 2) -6.

§ 6. 1.

1-я ваза	я	г	я,г	—
2-я ваза	г	я	—	я,г

2.

1-я ваза	я	а,г	г	а,я	а	г,я	а,г,я	—
2-я ваза	а,г	я	а,я	г	г,я	а	—	а,г,я

3. Тридцатью двумя способами (2^5). 4. 2^{12}. 5. 1) Гипотеза ошибочна, так как, например, любые девочка и мальчик не являются сестрами; 2) гипотеза ошибочна (достаточно рассмотреть равносторонний треугольник); 3) гипотеза ошибочна, так как четность многозначного числа определяется по последней цифре и, например, число, оканчивающееся на 23, нечетное, хотя его предпоследняя цифра 2; 4) гипотеза верна: пусть первое нечетное число имеет вид $2k-1$, а второе — $2m-1$, где k и m — натуральные числа, тогда $(2k-1)+(2m-1)=2k+2m-2=2(k+m-1)$ — четное число; 5) гипотеза верна (доказательство см. в главе «Разложение многочленов на множители»); 6) гипотеза верна (доказательство см. в главе «Разложение многочленов на множители»); 7) для принятия или опровержения гипотезы данных недостаточно (мальчики могут быть как братьями, так и однофамильцами); 8) гипотеза ошибочна, так как, например, при $n=41$ имеем $n^2+n+41=41^2+41+41=$ $=41\cdot 43$ — составное число. 6. Не более чем $2^1+2^2+2^3+2^4+2^5=62$. 7. $2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6=126$. 8. 3^n.

Упражнения к главе I. 1. 1) 121; 2) 900. **2.** 1) 120; 2) 190. **5.** 1) 89, 98; 2) 88, 89, 98, 99. **6.** 1) 78, 79, 87, 89, 97, 98; 2) 78, 79, 87, 89, 97, 98, 77, 88, 99. **7.** 789, 798, 879, 897, 978, 987. **8.** 1) 80, 89, 90, 98; 2) 80, 89, 90, 98, 88, 99. **9.** 888, 889, 898, 899, 988, 989, 998, 999. **10.** А Б В; А В Б; Б А В; Б В А; В А Б; В Б А. **11.** А, В; А, Г; В, Г. **12.** а б; б а; а в; в а; б в; в б. **13.** 1) 60-ю; 2) 120-ю. **14.** 4 (столько же, сколько способов выбрать одного из четверых). **15.** 1) 30; 2) 600; 3) 8; 4) 132; 5) $n+1$. **16.** Шестнадцатью.

Глава II

§ 7. 1. 1) Случайное; 2) невозможное. **2.** 1) Случайное; 2) невозможное. **3.** 1) Случайное; 2) случайное; 3) невозможное; 4) достоверное. **4.** 1) Невозможное; 2) достоверное. **5.** Достоверное. **6.** 1) Случайное; 2) невозможное; 3) невозможное; 4) случайное; 5) достоверное. **7.** 1) Совместные; 2) несовместные. **8.** 1) Несовместные; 2) совместные. **9.** 1) Совместные; 2) совместные; 3) несовместные; 4) несовместные. **12.** Не являются. **13.** 1) Не являются; 2) являются. **14.** 1) Являются; 2) являются; 3) являются; 4) не являются; 5) являются. **15.** 1) Являются; 2) не являются.

§ 8. 3. 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{3}{5}$; 3) 0; 4) 1. **4.** 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{4}{9}$; 4) $\frac{7}{9}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{5}{9}$. **5.** 1) $\frac{1}{10}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{3}{10}$; 4) $\frac{1}{5}$; 5) $\frac{1}{5}$; 6) $\frac{2}{5}$. **6.** $\frac{1}{10}$. **7.** 1) $\frac{1}{50}$; 2) $\frac{49}{50}$. **8.** $\frac{24}{25}$. **9.** $\frac{1}{2}$. **10.** 1) $\frac{1}{36}$; 2) $\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{18}$; 4) $\frac{5}{36}$; 5) $\frac{1}{12}$. **11.** $P(A)=\frac{8}{27}$; $P(B)=\frac{4}{9}$; $P(C)=\frac{2}{9}$; $P(D)=\frac{1}{27}$.

§ 9. 1. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$. 2. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{4}$. 3. 1) $\frac{1}{36}$; 2) $\frac{1}{18}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{1}{6}$; 7) $\frac{1}{6}$; 8) $\frac{1}{18}$; 9) $\frac{1}{12}$; 10) $\frac{1}{18}$; 11) $\frac{1}{12}$; 12) $\frac{1}{6}$. 4. 1) $\frac{1}{18}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{1}{18}$; 4) $\frac{1}{9}$. 5. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{6}$. 6. 1) $\frac{1}{24}$; 2) $\frac{1}{24}$. 7. 1) $\frac{1}{216}$; 2) $\frac{1}{72}$. 8. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$. 9. $\frac{1}{6}$. 10. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$. 11. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{2}{3}$. 12. 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{2}{5}$. 13. 1) $\frac{1}{630}$; 2) $\frac{1}{105}$.

§ 10. 1. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{3}$; 5) $\frac{5}{12}$. 2. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{5}{6}$; 5) 1. 3. $\frac{\pi}{25}$. 4. 0.

§ 11. 1. 1) Выпала не решка (т. е. орел); 2) выпало не 5 очков (т. е. одно из чисел 1, 2, 3, 4, 6); 3) выпало нечетное число очков (т. е. либо 1, либо 3, либо 5 очков); 4) вытащил невыигрышный билет; 5) стрелка остановилась на одном из секторов 1, 2 или 3; 6) вынут не белый (т. е. черный) шар. 2. 1) 0,97; 2) $\frac{119}{121}$. 3. Выпало не менее 5 очков (т. е. 5 или 6 очков). 4. $\frac{5}{6}$. 5. $\frac{3}{4}$. 6. 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{7}{12}$. 7. Ни одна пуля не попала в цель. 8. 1) $\frac{35}{36}$; 2) $\frac{5}{6}$. 9. 1) $\frac{377}{378}$; 2) $\frac{17}{18}$. 10. 1) $\frac{629}{630}$; 2) $\frac{104}{105}$.

§ 12. 2. $\frac{238}{250}$. 3. 2,5%. 4. $P \approx 0{,}6$. 5. 1) $P \approx 0{,}14$; 2) $P \approx 0{,}84$.

§ 13. 1. 1) Является; 2) является; 3) является; 4) не является. 2. Не является; у первого игрока шансов больше, чем у других, получить преимущество.

Упражнения к главе II. 1. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $\frac{3}{4}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{7}{12}$; 7) 0; 8) 1. 2. 1) $\frac{1}{30}$; 2) $\frac{29}{30}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{5}{6}$; 5) $\frac{1}{3}$; 6) $\frac{1}{6}$; 7) $\frac{7}{30}$; 8) $\frac{2}{15}$. 3. 0,01. 4. 1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{1}{4}$. 5. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{18}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{2}$. 6. 0,985. 7. 1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{18}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{4}{9}$. 8. 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{1}{8}$. 9. 1) $\frac{17}{18}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{1}{2}$. 10. 1) $\frac{11}{36}$; 2) $\frac{3}{4}$. 11. 1) $\frac{3}{10}$; 2) $\frac{1}{10}$; 3) $\frac{3}{5}$; 4) $\frac{7}{10}$; 5) $\frac{2}{5}$. 12. 1) $\frac{31}{70}$; 2) $\frac{67}{315}$.

§ 14.

2.

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

3.

X	2	3	4	5	6	7	8
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

4.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

6.

X	34	35	36	37	38	39	40
M	1	3	4	6	3	2	1
W	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$

8. В таблице приведен результат анализа страницы текста из «Севастопольских рассказов» Л. Н. Толстого.

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З
0,090	0,027	0,056	0,012	0,025	0,087	0,007	0,013

И	Й	К	Л	М	Н	О	П
0,057	0,007	0,036	0,045	0,029	0,066	0,137	0,025

Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч
0,047	0,061	0,054	0,017	0,001	0,014	0,007	0,014

Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0,012	0,006	0,001	0,008	0,015	0,002	0,010	0,012

9. Онегин, добрый мой приятель, Родился на брегах Невы, Где, может быть, родились вы Или блистали, мой читатель.

§ 15. 4. 1)

X	145—149	150—154	155—159	160—164	165—169	170—174	175—179	180—184
M	1	9	14	8	7	6	3	2

§ 16. 1. 1. 3); 2. 2); 3. 2); 4. 3); 5. 3); 6. 3). **3.** 200. **4.** 240. **5.** 60; 100; 120; 240; 220; 140; 80; 40. **6.** 9600; 6000; 4800; 4200; 3300; 1500; 600.

§ 17. 1. 1) 8; 2 и 6; 3; 2) 11; 2; 1. **2.** 1) 3; 3; 3; 2) 7; 3 и 5; 3. **3.** 1) $R=6$; $Mo=-2$; $Me=1$; 2) $R=0{,}5$; $Mo_1=0{,}1$, $Mo_2=0{,}2$, $Mo_3=0{,}4$, $Mo_4=0{,}5$; $Me=0{,}35$. **4.** 1) 3; 2) $-0{,}5$; 3) $2\frac{1}{7}$; 4) 5. **5.** 1) $2\frac{1}{7}$; 2) 2,5. **6.** 7,00 г/см^3; железо. **7.** 12,25 лет; 13 лет. **8.** 135 см — высота, являющаяся медианой и модой совокупности, а также приближенным средним значением совокупности, из которой удален «случайный» результат 90 см. **9.** $\overline{X}\approx 12$ лет; $Mo=19$ лет; $Me=11$ лет.

§ 19. 1. 1) 3,5 см; 2) 11,5 г; 3) 1,2 с; 4) 9,2 м. **2.** 1) 2,56; 2) 4,96. **3.** 1) $D_1<D_2$; 2) $D_1>D_2$. **4.** 1) $D_1>D_2$; 2) $D_1>D_2$. **5.** Второй игрок более стабилен. **6.** Средние результативности одинаковы; первый футболист более стабилен.

§ 20. 1. 1) $\sigma\approx 1{,}7$ кг; 2) $\sigma\approx 1{,}9$ м. **2.** 1) $\sigma\approx 1{,}7$; 2) $\sigma\approx 3$. **3.** Первая, так как $\sigma_1\approx 2<\sigma_2\approx 3{,}1$. **4.** Первый прибор предпочтительнее, так как $D_1=1{,}2<D_2=7{,}6$.

Упражнения к главе III

1.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$

2.

Размер (X)	42	44	46	48	50	52	54	56	58
Кол-во халатов (M)	1500	3000	9000	18 000	16 500	10 500	9000	4500	1500

3) $Mo=48$, $Me=50$, $\overline{X}\approx 48$, $R=16$. **3.** Совокупность значений величины Y.

Оглавление

Учебно-методический комплект по алгебре для 7, 8 и 9 классов содержит:

Учебники для 7, 8 и 9 классов
авторы Ш. А. Алимов и др.

Изучение алгебры в 7-9 классах
авторы Ю. М. Колягин и др.

Дидактические материалы по алгебре

7 класс
авторы Л. И. Звавич, Л. В. Кузнецова, С. Б. Суворова

8 класс
авторы В. И. Жохов, Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк

9 класс
авторы Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, Л. М. Короткова

Рабочие тетради по алгебре для 7, 8 и 9 классов
авторы Ю. М. Колягин и др.

За страницами учебника алгебры
автор Л. Ф. Пичурин

ISBN 5-09-013957-1

·Просвещение·