МОУ «Вечерняя (сменная) общеобразовательная школа №2»
г. Курган

Методическая разработка

"Вероятность и статистика"

1.Что изучает теория вероятностей.

Математику многие любят за её вечные истины: дважды два всегда четыре, сумма чётных чисел чётно, а площадь прямоугольника ровна произведению его смежных сторон. В любой задаче, которую вы решали на уроках математики, у всех получался один и тот же ответ – нужно было только не делать ошибок в решении

Реальная жизнь не так проста и однозначна. Исходы многих явлений заранее предсказать невозможно, какой бы полной информацией о них мы ни располагали. Нельзя, например, сказать наверняка, какой стороной упадёт подброшенная вверх монета, когда в следующем году выпадет первый снег или сколько человек в городе захотят в течение ближайшего часа позвонить по телефону. Такие непредсказуемые явления называются случайными.

Однако случай тоже имеет свои законы, которые начинают проявляться при многократном повторении случайных явлений. Если подбросить монету 1000 раз, то «орёл» выпадет приблизительно в половине случаев, чего никак нельзя сказать о двух или даже десяти бросаниях. Обратите внимание на слово «приблизительно» - закон не утверждает, что число «орлов» будет в точности 500 или окажется в промежутке от 490 до 510. Он вообще ничего не утверждает наверняка, но даёт определённую степень уверенности в том, что некоторое случайное событие произойдёт. Такие закономерности изучает специальный раздел математики – Теория вероятностей. С её помощью можно с большой

степенью уверенности (но всё равно не наверняка!) предсказать и дату выпадения первого снега, и количество телефонных звонков.

Теория вероятностей неразрывно связана с нашей повседневной жизнью. Это дает нам с вами замечательную возможность установить многие вероятностные законы опытным путем, многократно повторяя случайные эксперименты. Материалами для этих экспериментов чаще всего будут обыкновенная монета, игральный кубик набор домино, рулетка и даже колода карт. Каждый из этих предметов, так или иначе, связан с играми. Дело в том, случай здесь предстает в наиболее чистом виде, и первые вероятностные задачи были связаны с оценкой игроков на выигрыш.

Современная теория вероятностей ушла от азартных игр так же далеко, как геометрия от задач землеустройства, но их реквизит по-прежнему остается наиболее простым и надежным источником случая. Поупражнявшись с рулеткой и кубиком, вы научитесь вычислять вероятность случайных событий в реальных жизненных ситуациях, что позволит вам оценивать свои шансы на успех; проверять гипотезы, принимать оптимальные решения не только в играх и лотереях.

Решая вероятностные задачи, будьте очень внимательны, старайтесь обосновывать каждый свой шаг, ибо никакая другая область математики не содержит такое количество парадоксов, как теория вероятностей. И, пожалуй, главное объяснение этому - ее связь с реальным миром, в котором мы живем.

2.Случайные события.

Оценивая возможность наступления какого-либо события, мы часто говорим: «Это очень возможно», «Это непременно произойдет», «Это маловероятно», «Это никогда не случится».

Купив лотерейный билет, мы можем выиграть, а можем и не выиграть; на очередных выборах правящая партия может победить, а может и не победить; завтра на уроке математики вас могут вызвать к доске, а могут и не вызвать.

Все это примеры случайных событий, которые при одних и тех же условиях могут произойти, а могут и не произойти.

Мы будем обозначать события заглавными латинскими буквами и заключать их описание в фигурные скобки, например:

A={в следующем году первый снег в Москве выпадет в воскресенье};

B={свалившийся со стола бутерброд упадет на пол маслом вниз};

C={ при бросании кубика выпадет шестерка};

D= {при бросании кубика выпадет четное число очков}.

Все перечисленные выше события A, B, C, D — случайные.

Есть и такие события, которые в данных условиях произойти не могут. Их называют невозможными событиями. Например:

E={в следующем году снег в Москве вообще не выпадет};

F={ при бросании кубика выпадет семерка}.

Если же событие при данных условиях обязательно произойдет, то его называют достоверным. Например

G={в следующем году в Москве выпадет снег};

H={при бросании кубика выпадет число очков, меньшее 7}

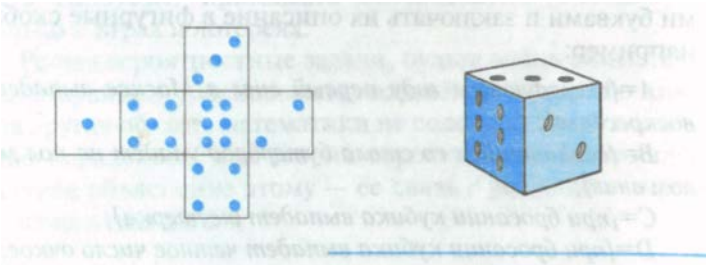
К достоверным можно отнести и событие В, правда достоверность его оказывается под вопросом в невесомости, но там обычно не едят бутербродов с маслом.

Невозможные и достоверные события встречал жизни сравнительно редко. Поэтому можно сказать, что живем мы в мире случайных событий.

Чтобы доказать, что данное событие - случайное нужно привести пример такой ситуации, или, как говорят математики, такого исхода, когда событие происходит пример такого исхода, когда оно не происходит.

Так, например, событие D - случайное, потому что оно происходит, когда на кубике выпадает четверка и не происходит, когда на кубике выпадает пятерка.

При бросании кубика может выпасть от одно шести очков (см. рис.), поэтому событие F - невозможное, а событиен H - достоверное.



Пример 1. Бросаем два кубика. Какие из следующих событий невозможные, какие - случайные, а какое достоверные:

В теории вероятностей принято все события называть случайными, а невозможные и достоверные рассматривать как их специальные разновидности

A - {на кубиках выпало одинаковое число очков};
B - {сумма очков на кубиках не превосходит 12};
C - {сумма очков на кубиках равна 11};
D - {произведение очков на кубиках равно 11}?

Исход любого бросания можно описать двумя числами, выпавшими на кубиках. Например, (3, 1) означает, что на первом кубике выпало число 3, а на втором - число 1.

При исходе (1,1) событие А происходит, а при исходе (1, 2) - не происходит. Значит, событие А случайное.

Событие В происходит при любом исходе: ведь каждое из двух чисел на кубиках не превосходит 6, а значит, их сумма не превосходит 12. Следовательно, событие В достоверное.

Событие C происходит при исходе (5, 6), но не происходит при исходе (2, 2). Значит, оно случайное.

Наконец, для события D нет исхода, при котором оно происходит: число 11 нельзя представить в виде произведения двух целых чисел от 1 до 6. Значит, это событие невозможное.

Пример 2. В коробке 3 красных, 3 желтых, 3 зеленых шара. Вытаскиваем наугад 4 шара. Какие из следующих событий невозможные, какие - случайные, а какие - достоверные:

A={все вынутые шары одного цвета};
B={все вынутые шары разных цветов};
C={среди вынутых шаров есть шары разных цветов};
D={среди вынутых есть шары всех трех цветов}?

Событие A - невозможное: нельзя вытащить из коробки четыре шара одного цвета, так как в ней только по три шара каждого цвета.

Событие B - тоже невозможное: шары в коробке трех цветов, а вынимаем мы четыре шара.

Событие C - достоверное: ведь все четыре шара, как мы уже выяснили, не могут быть одного цвета, поэтому среди них обязательно есть шары хотя бы двух цветов.

Наконец, событие D- случайное. Закодируем исходы опыта первыми буквами цветов, в которые окрашены вынутые шары. Например: КЖЖЗ означает, что вынули один красный, два желтых и один зеленый шар. КЖЖЗ это пример исхода, при котором событие D происходит, а ККЖЖ пример исхода, когда событие D не происходит.

1. Укажите, какие из следующих событий невозможные, какие - достоверные, какие - случайные:

A={футбольный матч «Спартак» — «Динамо» закончится вничью};
B={вы выиграете, участвуя в беспроигрышной лотерее};
C={в полночь выпадет снег, а через 24 часа будет светить солнце};
D={завтра будет контрольная по математике};
E={30 февраля будет дождь};
F={вас изберут президентом США};
G={вас изберут президентом России}.

2. Вы купили в магазине телевизор, на который фирма-производитель дает два года гарантии. Какие из следующих событий невозможные, какие - случайные, какие - достоверные:

A={телевизор не сломается в течение года};
B={телевизор не сломается в течение двух лет};

C={в течение двух лет вам не придется платить за ремонт телевизора};
D ={телевизор сломается на третий год} ?

3 В коробке лежит 10 красных, 1 зеленая и 2 синие ручки. Из коробки наугад вынимают два предмета. Какие из следующих событий невозможные, какие - случайные, какие - достоверные:

A={вынуты две красные ручки};
B={вынуты две зеленые ручки};
C={вынуты две синие ручки};
D={вынуты ручки двух разных цветов}.
E={вынуты две ручки};
F={вынуты два карандаша} ?

4. Три господина, придя в ресторан, сдали в гардероб свои шляпы. Расходились по домам они уже в темноте и разобрали шляпы наугад. Какие из следующих событий невозможные, какие - случайные, какие - достоверные:

A={каждый надел свою шляпу};
B={все надели чужие шляпы};
C={двое надели чужие шляпы, а один - свою};
D={двое надели свои шляпы, а один - чужую}?

5. В игре «Любовь с первого взгляда» участвуют трое юношей и три девушки. Каждый юноша выбирает одну из девушек, а каждая девушка - одного из юношей. Если юноша и девушка выбирают друг друга, то образуется пара. Какие из следующих событий невозможные, какие случайные, какие - достоверные:

A={не образовалось ни одной пары};

B={образовалась одна пара};

C={образовалось две пары};

D ={образовалось три пары} ?

6.Винни-Пух, Пятачок и все-все-все садятся за круглый стол праздновать день рождения. При каком количестве всех-всех-всех событие A={Винни-Пух и Пятачок будут сидеть рядом} является достоверным, а при каком - случайным?

7.В школе учится N учеников. При каких значениях N событие A={в школе есть ученики с совпадающими днями рождения} является случайным, а при каких - достоверным? Выясните, произошло ли это событие в вашей школе. А в вашем классе?

8.Среди 100 билетов школьной благотворительной лотереи 20 выигрышных. Сколько билетов вам надо купить, чтобы событие A={вы ничего не выиграете} было невозможным?

9. В шкафу 10 пар ботинок с 36-го по 45-й размер – по одной паре каждого размера. Ботинки достают из шкаф наугад. Какое наименьшее количество ботинок надо вынуть из шкафа, чтобы событие А - {из вынутых ботинок можно составить хотя бы одну пару} было достоверным?

10.В классе учится 10 мальчиков и 20 девочек. Какие из следующих событий являются для такого класса невозможными, какие - случайными, какие - достоверными:

А={в классе есть два человека, родившихся в разные месяцы};
В={в классе есть два человека, родившихся в одном месяце};
С={в классе есть два мальчика, родившихся в одном месяце};
D={в классе есть две девочки, родившиеся в одном месяце};
Е={все мальчики родились в разные месяцы};
F={ все е девочки родились в разные месяцы};
С={есть мальчик и девочка, родившиеся в одном месяце};
Н={есть мальчик и девочка, родившиеся в разные месяцы} ?

11.Автобусу, в котором едет 15 пассажиров, предстоит сделать 10 остановок. Какие из следующих событий не возможные, какие - случайные, какие - достоверные:

А={все пассажиры выйдут из автобуса на разных остановках};
В={все пассажиры выйдут на одной остановке};
С={на каждой остановке хоть кто-то выйдет};
D ={найдется остановка, на которой никто не выйдет};
Е={на всех остановках выйдет четное число пассажиров};
F={на всех остановках выйдет нечетное число пассажиров} ?

12. На координатной прямой в начале отсчета стоит фишка. После каждого бросания монеты она сдвигается на единицу вправо. если выпал «орел», или на единицу влево, если выпала «решка». Какие из следующих событий невозможные, какие - случайные, какие - достоверные:

А={после 4-х бросаний фишка находится в точке с координатой О};
В={после 3-х бросаний фишка находится е точке с координатой 2};
С={после 5-ти бросаний фишка находится в точке с координатой 5};
D = {после 50-ти бросаний фишка находится в точке с координатой 25};
Е ={после 50-ти бросаний фишка находится в мочке с координатой 26} ?

13. На тетрадный лист в линейку бросают зубочистку. Расстояние между линейками 1 см. При какой длине зубочистки событие А={зубочистка пересекла 10 линий} будет невозможным, при какой - случайным, при какой - достоверным?

14. Около школы останавливаются автобусы трех маршрутов: № 1, № 2 и № 3. Интервал в движении автобусов каждого маршрута колеблется от 8 до 10 минут. Когда Саша, Маша, Гриша и Аня подошли к остановке, от нее отошел автобус № 3, а еще через 6 минут подошел автобус № 1. После этого каждый из ребят высказал свое мнение о том, автобус какого маршрута будет следующим:

Саша: Следующим обязательно будет N° 2;
Маша: Возможно, что следующим будет N° 2;
Гриша: Возможно, что следующим будет N° 3;
Аня: Невозможно, что следующим будет № 1.

С кем из ребят вы согласны, а с кем нет? Объясните сделанный выбор.

15*. На дорогу от дома до школы Миша тратит от 10 до 15 минут, если идет пешком, и от 2 до 3 минут, если едет на троллейбусе. При каких интервалах движения троллейбусов событие А={по пути в школу Мишу обгонит хотя бы один троллейбус} будет невозможным, при каких - случайным, при каких - достоверным?

16. а) В коробке 3 красных, 3 желтых, 3 зеленых шара. Вытаскиваем наугад N шаров. Рассмотрим событие А={среди вынутых шаров окажутся шары ровно трех цветов}. Для каждого N от 1 до 9 определите, какое это событие - невозможное, достоверное или случайное, и заполните таблицу:

N									
Событие А									

б) В коробке снова 3 красных, 3 желтых, 3 зеленых шара. Вытаскиваем наугад 4 шара. Рассмотрим событие В={среди вынутых шаров окажутся шары ровно М цветов}. Для каждого М от 1 до 4 определите, какое это событие - невозможное, достоверное или случайное, и заполните таблицу:

м	1	2	3	4
Событие В				

в) Все в той же коробке 3 красных, 3 желтых, 3 зелены шара. Вытаскиваем наугад N шаров. Рассмотрим событие С={среди N вынутых шаров окажутся шары ровно М разных цветов}. Для каждого N от 1 до 9 и каждого М от 1 до 4 определите, какое это событие - невозможное, достоверное или случайное, и заполните таблицу. Какую строку и какой

столбец этой таблицы можно заполнить по результатам двух предыдущих задач?

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									

3.Что вероятнее?

Сравнение шансов.

Итак, случайные события при одних и тех же условиях могут произойти, а могут и не произойти. При этом у одних случайных событий шансов произойти больше (значит, они более вероятные - ближе к достоверным), а у других меньше (они менее вероятные - ближе к невозможным).

Понятно, что более вероятные события будут происходить чаще, а менее вероятные - реже. Так что сравнивать вероятности можно и по частоте, с которой события происходят. Правда, для этого нужны статистические данные.

Попытаемся расположить на специальной вероятностной шкале события, приведенные в предыдущем параграфе:

A={в следующем году первый снег в Москве выпадет в воскресенье};
B={свалившийся со стола бутерброд упадет на пол маслом вниз};
C={при бросании кубика выпадет шестерка};
D={при бросании кубика выпадет четное число очков};
E={в следующем году снег в Москве вообще не выпадет};
F={при бросании кубика выпадет семерка};
G={в следующем году в Москве выпадет снег};
H={при бросании кубика выпадет число очков, меньшее 7}.

Пусть слева, в начальной точке шкалы, будут располагаться невозможные события, справа, в конечной точке, - достоверные, а между ними - случайные.

При этом чем больше у случайного события шансов произойти, тем оно более вероятно и тем правее его следует расположить на вероятностной

шкале; чем меньше шансов - тем левее. Если два события, на наш взгляд, имеют равные шансы, будем располагать их в одном и том же месте шкалы друг над другом.

Покажем, что перечисленные выше событии располагаются на вероятностной шкале так, как изображено на рисунке

Рис . 1.

Проще всего расположить на шкале невозможные и достоверные события. Как уже говорилось, события

E={в следующем году снег в Москве вообще не выпадет} и F ={при бросании кубика выпадет семерка} - невозможные. У них нет никаких шансов произойти, поэтому они расположены в левом конце шкалы. Достоверные события

G ={в следующем году в Москве выпадет снег}

и H={при бросании кубика выпадет число очков, меньшее 7} обязательно произойдут, поэтому они расположены в правом конце шкалы.

А как располагать на шкале случайные события? Начнем с события D={при бросании кубика выпадет четное число очков}.

Когда мы бросаем кубик, каждая из шести граней имеет равные шансы оказаться верхней. Четное число очков - на трех гранях кубика, на трех других - нечетное. Значит, ровно половина шансов (три из шести) за то, что событие D произойдет, и ровно половина (три из шести) за то, что оно не произойдет. Поэтому мы расположили событие D в середине шкалы

.

У события C={при бросании кубика выпадет шестерка} только один шанс из шести, а у события D - три шанса из шести. Поэтому C менее вероятно и расположено на шкале левее события D.

Событие A={в следующем году первый снег а Москве выпадет в воскресенье} еще менее вероятно, чем C, - ведь в неделе 7 дней и в любой из них с равной вероятностью может выпасть первый снег, поэтому у события A один шанс из семи.

Труднее всего расположить на шкале событие B={свалившийся со стола бутерброд упадет на пол маслом вниз}. Здесь нельзя точно подсчитать шансы, но можно призвать на помощь жизненный опыт: бутерброд гораздо чаще падает на пол именно маслом вниз (есть даже «закон бутерброда»), поэтому событие B гораздо вероятнее, чем D

Построенная вероятностная шкала не совсем настоящая -на ней нет числовых меток, делений. Ведь вы еще не умеете измерять вероятности случайных событий числами, как это происходит с длинами отрезков или величинами углов. Совсем скоро вы узнаете, как вычислять вероятность, - пока же потренируйтесь в сравнении шансов и в расположении событий на вероятностной шкале.

Пример 1. Вова хочет вытянуть наугад одну карту из колоды с 36-ю картами. Маша, Саша, Гриша и Наташа предсказали следующее:

Маша: Это будет король.
Саша: Это будет пиковая дама.
Гриша: Эта карта будет красной масти.
Наташа: Эта карта будет пиковой масти.

Как сравнить между собой шансы предсказателей?
Обозначим все события, предсказанные ребятами, буквами:

A={Вова достанет короля};
B={Вова достанет пиковую даму};
C={Вова достанет карту красной масти};
D={Вова достанет карту пиковой масти}.

Подсчитаем теперь, сколько шансов за осуществление каждого из этих событий, или, другими словами, сколько в колоде соответствующих карт. Всего в колоде: королей - 4; пиковая дама - 1; карт красных мастей-18; пик- 9.

Чем больше шансов, тем вероятнее будет соответствующее случайное событие. Их расположение на вероятностной шкале показано на рисунке.

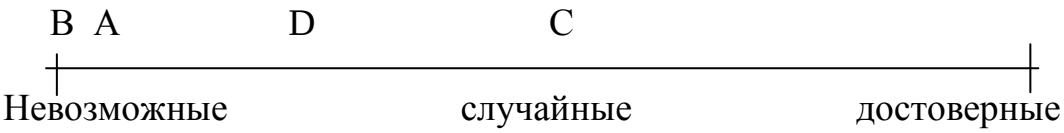


Рис . 2.

Понятно, что шансы предсказателей будут соотноситься между собой так же, как шансы рассмотренных событий.

Пример 2. Что вероятнее: A={получить шестерку при подбрасывании кубика} или B={вытянуть шестерку из перетасованной колоды карт}?

Как и в предыдущем примере, подсчитаем шансы за осуществление каждого из этих событий. На кубике одна шестерка; в колоде четыре шестерки. Стало быть, событие. В более вероятно? Нет, конечно! Просто мы неверно считали шансы. Ведь когда речь идет о шансах, то говорят не просто «два шанса» или «один шанс», а «два шанса из трех» или «один шанс из

тысячи».

В примере 1 это не могло привести к ошибке, поскольку там все шансы были «из 36». А вот в этом примере ситуация сложнее:

шестерок на кубике -1, а всего граней у куба - 6;
шестерок в колоде - 4, а всего карт в колоде - 36.

Ясно, что «1 шанс из 6» лучше, чем «4шанса из 36», ведь 1/6 больше 4/36.

Таким образом, шансы имеет смысл сравнивать как дроби: в числителе - сколько шансов за осуществление данного события, а в знаменателе - сколько всего возможно исходов. Понятно, что если знаменатели одинаковые, то можно сравнивать только числители (что и было сделано в примере 1).

Пример 3. Попробуем на основе нашего опыта общения по телефону сравнить между собой степень вероятности следующих событий:

A ={вам никто не позвонит с 5 до 6 утра};
B ={вам кто-нибудь позвонит с 5 до 6 утра};
C ={вам кто-нибудь позвонит с 18 до 21};
D ={вам никто не позвонит с 18 до 21}.

Ранним утром звонки бывают очень редко, поэтому событие A - очень вероятное, почти достоверное, а B - маловероятное, почти невозможное.

Вечерние часы, наоборот, время самого активного телефонного общения, поэтому событие C для большинства людей вероятные, чем D. Хотя, если вам вообще звонят редко, D может оказаться вероятнее C.

17. В коробке лежит 10 красных, 1 зеленая и 2 синие ручки. Из нее наугад вынимается один предмет. Определите, какие из событий более вероятные, какие - менее вероятные. Расположите их на вероятностной шкале:

A={будет вынута красная ручка};
B={будет вынута зеленая ручка};
C={будет вынута синяя ручка};
D={будет вынута ручка};
E={будет вынут карандаш}.

18. Антон учится в 6 «А» классе, Борис - в 6 «Б», Вадим - в 6 «В». От каждого класса по жребию выбирают одного делегата в школьный хор. Как вы думаете, у кого из друзей больше шансов петь в хоре, если в 6 «А» учится 25 человек, в 6 «Б» - 22 человека, а в 6 «В» - 28 человек?

19. Из коробки с синими и черными шарами наугад вынимают один шар. Сравните между собой шансы вынуть синий шар из коробок, изображенных на рисунке 3, и расположите на вероятностной шкале соответствующие им случайные события.

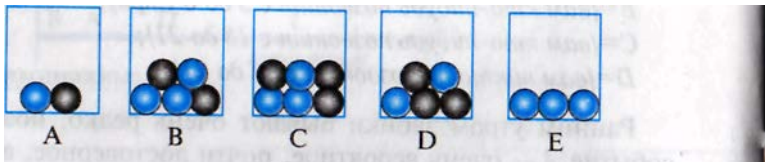


Рис. 3

20. Расположите на вероятностной шкале события:

A={1 января в Москве пойдет снег};
B={1 января в Москве пойдет дождь};
C={1 января в Москве будет северное сияние};
D= {l января над Москвой взойдет солнце}.

21.Когда Витя почувствовал себя нездоровым, мама, как обычно, поставила ему термометр. Расположите на вероятностной шкале следующие события:

A={Ватина температура больше 36,6°};
B={Витина температура равна 36,6°};
C={Ватина температура меньше 36,6°};
D= {Ватина температура больше 20°};
E={Ватина температура меньше 100°}.

22.Придумайте примеры случайных событий A, B, C, D E, которые расположились бы на вероятностной шкале так, как на рисунке 4.

Рис. 4.

23.Винни-Пух и Пятачок обычно решают, к кому идти в гости, с помощью вертушки, изображенной на рисунке 5. Если стрелка остановится на черном

поле, то они идут к Винни-Пуху, если на белом- к Пятачку. К кому они ходят чаше? Во сколько раз?

рис. 5.

24. Малыш наугад показывает пальцем точку на глобусе. Сравните между собой шансы событий:

А={он попадет в Россию};
В={он попадет в Тихий океан};
С={он попадет в Западное полушарие}.

25. Вы выигрываете, если стрелка вертушки останавливается на черном. Какая из вертушек, изображенных на рисунке 6, даёт вам больше шансов на выигрыш?

В) Б) А)

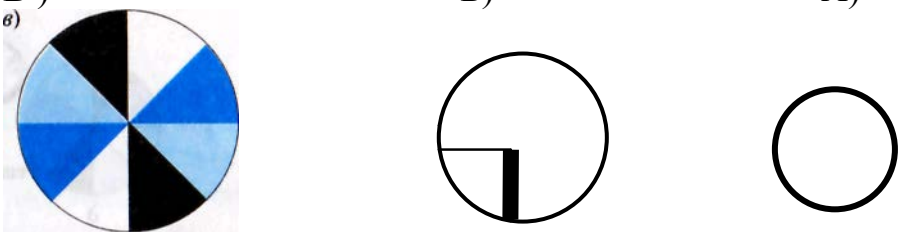


рис. 6

26. Бросают кубик. Определите, какие из событий более вероятные, какие - менее вероятные, и расположите их на вероятностной шкале:

А={выпадет четное число};

В={выпадет нечетное число};

С={выпадет тройка};

D= {выпадет шестёрка};

Е={выпадет число, больше трёх}

F ={выпадет число, меньше десяти}

27. Определите, какие из следующих событий более вероятные, какие - менее вероятные, и расположите их на вероятностной шкале:

А ={при бросании монеты выпадет «орел»};

B={при бросании кубика выпадет тройка};
C={при бросании кубика выпадет шестерка};
D= {из колоды карт вытянут карту красной масти};
E={из колоды карт вытянут туза};
P={из колоды карт вытянут пику};
G= {из колоды карт вытянут красную пику}.

Орел

Решка

28. Саша купил в магазине пачку чая и решил взвесить ее на лабораторных весах (их точность - до 1 миллиграмма). На пачке написан вес - 200 г. Расположите на вероятностной шкале следующие события:

A={вес пачки больше 200 г};
B={вес пачки меньше 200 г};
C={вес пачки ровно 200 г);
D= {вес пачки меньше 500 г};
E={вес пачки больше 100 г}.

29. Представьте, что вы купили карточку лотереи, в которой нужно правильно угадать 10 номеров из 20.Расположите на вероятностной шкале события:

A={вы угадаете все 10номеров};
B={вы не угадаете ни одного номера}.

30. Двое играют в вертушку: если стрелка остановится на черном секторе - выигрывает первый, если на белом - выигрывает второй. Если стрелка остановится на каком-то другом секторе, вертушку вращают ещё раз. Назовите вертушку (рис. 7), для которой:

а) шансы игроков будут равными;
б) у первого больше шансов выиграть;
в) у второго больше шансов выиграть;
г) игра будет наиболее продолжительной.

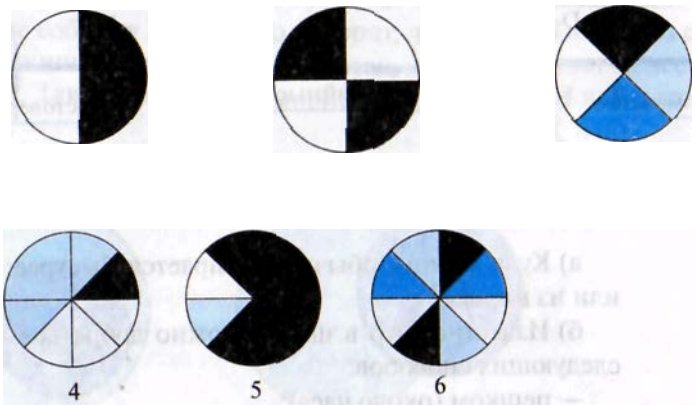


Рис. 7

31. У спичечного коробка шесть граней. Обозначим их буквами: A, B - грани с этикетками, C, D - грани, о которые чиркают спичкой, E, F - грани, где спички выдвигаются (на рисунке 8 можно увидеть три из шести граней). Сравните между собой шансы событий A, B, C, D, E, F, где каждое из них означает, что подброшенный вверх пустой коробок упадет на соответствующую грань. Изобразите их на вероятностной шкале.

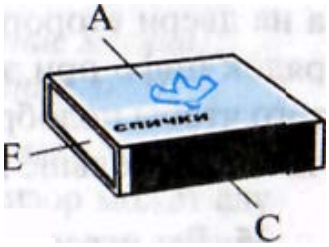


Рис. 8.

32. Пусть X – это время, которое вы тратите на путь от дома до школы, а У – время на путь от школы до дома. Расположите на вероятностной шкале события:

A={X меньше 20 минут};
B={X меньше 40 минут};
C={У больше X};
D = {У меньше X};
E={У равен X};

Учтите, что в этой задаче у каждого может получиться свой ответ!

33. Решая предыдущую задачу, ученик получил расположение событий на вероятностной шкале, показанное на рисунке 9.

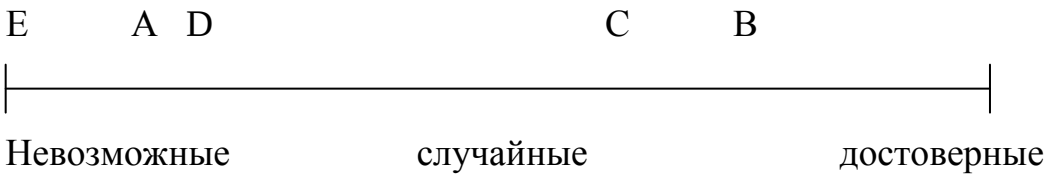


Рис. 9.

а) Куда ученик обычно добирается быстрее: в школу или из школы?

б) Известно, что в школу можно добраться одним из следующих способов:

-пешком (около часа);

-на автобусе (около 15 минут);

-на метро (около 30 минут).

Каким из этих способов чаще всего пользуется ученик?

34.На двери первого подъезда стоит кодовый замок, в котором нужно правильно нажать три цифры из десяти, а на двери второго подъезда - семь цифр из десяти. По рядок цифр при этом не учитывается. Верно ли, что, для того чтобы подобрать код второго замка, потребуется значительно больше времени, чем для первого?

35.Вы играете в «Поле чудес». Перед вами слово, которое вам абсолютно неизвестно и ни одна буква в нем еще не угадана. Какую букву вы назовете?

4.Эксперименты со случаем.

Частота абсолютная и относительная.

Теория вероятностей имеет дело с экспериментами, исходы которых непредсказуемы: они зависят от случая. С такими экспериментами мы уже сталкивались - это подбрасывание монеты и кубика, раскручивание рулетки, падение бутерброда на пол и т. д.

Для всех этих экспериментов характерно то, что их можно многократно повторять (хотя бы мысленно) в одних и тех же условиях. Иногда эксперименты повторяет за нас кто-то другой или сама природа, а нам остается только наблюдать за их исходами. Например, узнавать итоги еженедельной лотереи, регистрировать уровень весеннего разлива рек и т. д.

Чтобы выяснить, насколько вероятно то или иное случайное событие, связанное с экспериментом, нужно подсчитать, как часто оно происходит. Для этого используют две важные величины:

абсолютная частота показывает, сколько раз в серии экспериментов наблюдалось данное событие;

относительная частота (которую иногда называют просто **частотой**) показывает, какая доля экспериментов завершилась наступлением данного события.

Относительную частоту можно найти, поделив абсолютную частоту на число экспериментов. Иногда относительную частоту измеряют в процентах.

Пример 1. Проведем 50 экспериментов по подбрасыванию кубика. Исходы экспериментов будем заносить в таблицу. После чего вычислим абсолютную и относительную частоту каждого исхода.

В первом столбце таблицы перечислены все возможные исходы. Во

втором столбце производилась регистрация исходов, а в третьем и четвертом - подсчет частот.

Исходы	Подсчет повторений	Абсолютная частота	Относительная частота
1		9	0,18
2		6	0,12
3		8	0,16
4		11	0,22
5		9	0,18
6		7	0,14
		50	1

Полученная таблица, как и многие другие в этом параграфе, обладает некоторыми замечательными свойствами, которые сохраняются независимо от результатов проведенных экспериментов:

-сумма абсолютных частот в ней равна числу экспериментов (в нашем случае - 50);

-сумма относительных частот равна 1.

Проверка этих свойств поможет вам избежать ошибок при заполнении аналогичных таблиц.

Удобным графическим способом представления абсолютных и относительных частот служат столбчатые диаграммы (гистограммы От греческих слов histos — столб и gramma - запись), на которых каждая из частот изображается в виде столбика соответствующей высоты. Гистограмма относительных частот для рассмотренного примера построена на рисунке 1

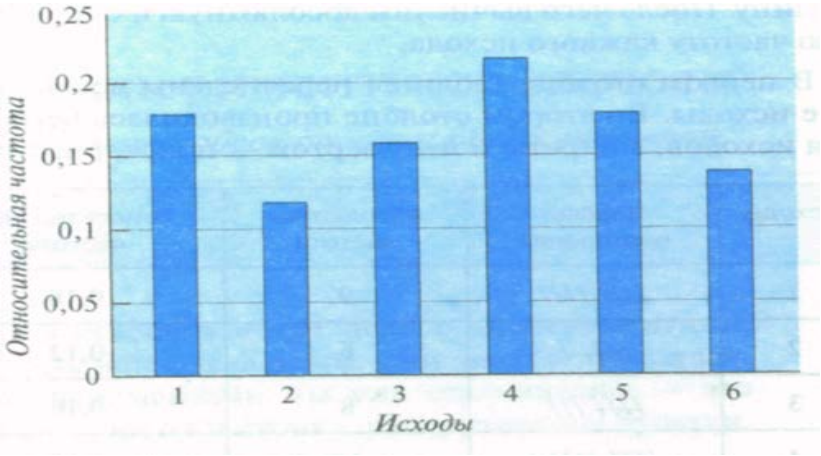


Рис. 1.

По таблице и гистограмме хорошо видно, что четверка выпадала в наших экспериментах чаще остальных исходов, а двойка реже. Но можно ли на этом основании сказать, что исход «4» более вероятен, чем исход «2»? На этот вопрос мы сможем ответить позже, когда поближе познакомимся с поведением частот.

Пример 2. По результатам экспериментов примера 1 найдем абсолютную и относительную частоты случайных событий:

A={на кубике выпало четное число очков};

B={на кубике выпало нечетное число очков};

C={на кубике выпало число очков больше трех}.

Заметим, что теперь речь идет о частоте событий, а не исходов. Одному событию может соответствовать несколько разных исходов - этот вопрос будет подробно обсуждаться в дальнейшем.

Абсолютную частоту события А получим как сумму абсолютных частот исходов 2,4,6:

6+11 + 7 = 24.

Относительную частоту события А можно получить сложением относительных частот исходов 2,4,6:

0,12 + 0,22 + 0,14 = 0,48,

а можно делением абсолютной частоты А на количество экспериментов:

24/50=0,48

Аналогично получим частоты событий В и С.

События	Абсолютная частота	Относительная частота

A	24	0,48
B	26	0,52
C	27	0,54

В этой таблице сумма абсолютных частот уже не равна числу экспериментов, а сумма относительных частот больше 1. Что это - ошибка? Нет, просто на этот раз мы вычисляли частоту не взаимоисключающих исходов, а произвольных случайных событий. Некоторые из них могли происходить одновременно (например, А и С) - поэтому и сумма их абсолютных частот больше 50.

В некоторых задачах этого и следующего параграфов от вас потребуется провести несколько десятков или даже сотен случайных экспериментов. Чтобы не тратить на это слишком много времени, можно немного «схитрить»: договориться, что каждый из вас проведет свою небольшую серию опытов, после чего объединить все эти серии в одну.

Например, чтобы посчитать частоту выпадения «орлов» при проведении двухсот опытов, можно каждому из 20 учеников бросить монету всего 10раз, а затем сложить полученные абсолютные частоты.

46. Учениками 7 «А» класса была проведена серия испытаний по подбрасыванию кубика. Полученные результаты представлены в таблице. Найдите относительную частоту каждого исхода.

Исходы	Абсолютная частота
1	26
2	25
3	19
4	27
5	25
6	28

47. Ученики 7 «Б» класса провели серию из 300 экспериментов по подбрасыванию кубика. Полученные

результаты представлены в таблице. Найдите абсолютную частоту каждого исхода.

Исходы	Относительная частота
1	0,1533
2	0,1933
3	0,16
4	0,1533
5	0,1467
6	0,1933

48. В начале XX века английский математик Карл Пирсон провел серию экспериментов по подбрасыванию монеты, в результате чего получил следующую таблицу.

Исходы	Абсолютная частота
«Орел»	12012
«Решка»	11988

а) Сколько случайных опытов провел Пирсон?

б)Какова относительная частота выпадения «орлов» в его опытах?

в) Какова относительная частота выпадения «решек»?

49. Узнав о результатах эксперимента Пирсона по подбрасыванию монеты (см. предыдущую задачу), Олег провел свою серию экспериментов и получил следующие результаты.

Исходы	Абсолютная частота	Относительная частота
«Орел»	141	

«Решка»		0,53

В этой таблице он не стал заполнять все клетки, посчитав это излишним. Прав ли Олег? Если да, восстановите недостающие значения.

50. Найдите относительную частоту появления каждой из 33 букв русского алфавита на этой странице (все другие символы не учитывайте). Нарисуйте гистограмму частот. По полученным данным найдите частоты событий:

A={букеа является гласной};

B={буква является согласной}.

Как вы думаете, на какую особенность языка указывает соотношение этих частот?

51. Найдите относительную частоту появления слов различной длины на этой странице. По полученным данным нарисуйте гистограмму частот и найдите частоты событий:

A={длина слова = 2};

B={длина слова > 2};

C={длина слова больше либо равно 2}.

Какая длина слова имеет наибольшую частоту? Можно ли утверждать то же самое о всей книге?

52. Проведите 100 испытаний по подбрасыванию двух одинаковых монет и заполните таблицу. Чем вы объясните, что последний исход повторяется чаще других?

Исходы	Абсолютная частота	Относительная частота
Обе монеты выпали на «орла»		
Обе монеты выпали на «решку»		
Одна на «орла», другая на «решку»		

53. Перед вами таблица абсолютных частот всех возможных исходов, полученная после проведения 100 экспериментов по подбрасыванию двух кубиков.

	1	2	3	4	5	6
1	6	2	6	4	1	0
2	6	2	3	6	3	3
3	4	2	1	3	4	0
4	2	3	3	2	5	0
5	1	0	7	2	0	1
6	2	2	2	7	3	2

С помощью этой таблицы найдите относительные частоты следующих событий:

A={на кубиках выпало одинаковое число очков};
B={сумма очков на кубиках равна 11};
C={произведение очков на кубиках равно 11};
D={на 1-м кубике выпало больше, чем на 2-м};
E={на 2-м кубике выпало больше, чем на 1-м}.

Придумайте еще три случайных события, связанных с этим экспериментом, и найдите их частоты.

54. В урне 3 красных, 3 желтых и 3 зеленых шара. Из нее 150 раз подряд извлекались и возвращались обратно три шара. По результатам испытаний была заполнена таблица.

С помощью этой таблицы найдите относительные частоты следующих событий:

A={все вынутые шары одного цвета};
B={все вынутые шары разного цвета};
C={среди вынутых шаров нет красных};
D={среди вынутых шаров есть красные},

Придумайте какое-нибудь случайное событие, связанное с проведенным экспериментом, относительная частота которого больше 0,5.

Исходы	Абсолютная частота
3к	3
3ж	5
3з	2
2к1ж	16
2к1з	14
2ж1к	27
2ж1з	23
2з1к	15
2з1ж	13
1к1ж1з	32

Б

55. Дано распределение дней рождения жителей города Юрьевска по месяцам и дням недели.

	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
Январь	21	37	32	28	36	20	14
Февраль	22	23	23	31	30	30	27
Март	25	30	34	25	28	18	27
Апрель	18	28	21	25	26	26	32
Май	27	30	25	26	27	28	25
Июнь	22	19	30	31	29	30	26
Июль	28	27	16	25	31	22	33
Август	28	28	30	22	25	22	20
Сентябрь	22 .	25	31	32	30	22	28
Октябрь	28	21	25	31	30	25	28
Ноябрь	28	24	22	21	30	26	25
Декабрь	27	29	21	20	28	27	25

Найдите относительные частоты событий:

A={юрьевец родился в майское воскресенье};
B={юрьевец родился в зимний четверг};
C={юрьевец родился в понедельник};
D={юрьевец родился весной}.

56. По таблице из задачи 53, полученной при 100-кратном бросании двух кубиков, заполните таблицу абсолютных и относительных частот для сумм выпадавших очков. Указание. Сумма может превышать значения, равные 2,3,4,..., 12.

Нарисуйте гистограмму относительных частот. Какие значения суммы выпадали наиболее часто? Какие наименее часто? Как это можно объяснить?

57. Проведите 100 испытаний по подбрасыванию трех кубиков. После каждого опыта найдите сумму двух наименьших из выпавших значений и результаты занесите в таблицу.

Сумма двух наименьших	Абсолютная частота	Относительная частота
2		
3		
11		
12		

Нарисуйте гистограмму относительных частот. Сравните ее с гистограммой, полученной в задаче 56. В чем отличие этих гистограмм?

58. Для проведения случайного эксперимента возьмите тетрадный лист в линейку и зубочистку. Подбросьте зубочистку так, чтобы она упала на лист, и подсчитайте, сколько линеек она пересекла.

а) Какое наименьшее и какое наибольшее количество линеек может пересечь зубочистка? Для ответа на этот вопрос измерьте расстояние между линейками и длину зубочистки.

б) Повторите этот эксперимент 100 раз. Результаты за несите в таблицу.

Количество линеек	Абсолютная частота	Относительная частота
0		
1		
2		
…..		

в) Найдите относительную частоту события:

А={зубочистка пересекла хотя бы одну линейку}

г) Нарисуйте гистограмму относительных частот. Какое количество линеек чаще всего пересекает зубочистка?

59*. Ученики получили задание выяснить, кто чаще страдает близорукостью - мужчины или женщины. Каждый из них, опросив какое-то количество мужчин и какое-то количество женщин, выяснил, что относительная частота близоруких среди мужчин больше, чем среди женщин. Следует ли отсюда, что во всей совокупности опрошенных близорукие мужчины встречались чаше, чем близорукие женщины?

60*. Частота пробелов в некотором тексте равна 0,12 (пробел - это пропуск между словами). Какова средняя длина слова в этом тексте?

5.Всегда ли нужно бросать монету?

Классическое определение вероятности.

Итак, мы научились оценивать вероятность случайного события по относительной частоте его появления в длинной серии одинаковых опытов. Можно назвать такую вероятность экспериментальной или «апостериорной» (от лат. a posteriori — на основании опыта).

Но, во-первых, какой бы длинной ни была проведенная серия испытаний, она даст только приближенное значение вероятности. Во-вторых, далеко не всегда такую серию можно осуществить: скажем, на экспериментальное вычисление вероятности выигрыша в лотерею вам может просто не хватить

денег! К счастью, во многих ситуациях существуют более экономичные «априорные»: способы расчета вероятностей (от лат. a priori - заранее независимо от опыта).

Рассмотрим случайный эксперимент, который может завершиться одним из n возможных исходов, причем все исходы равновозможны, т. е. нет никаких оснований считать один исход вероятнее другого.

Например:

а) бросаем монету: n = 2;

б) бросаем кубик: n = 6;

в) вытягиваем карту из колоды: n = 36.

Конечно, во всех этих примерах можно говорить о равно возможности только при определенных условиях: монета и кубик правильные, колода хорошо перетасована и т. д.

Пусть ровно m из этих n исходов приводят к наступлению некоторого события А. Будем называть такие исходы **благоприятными** для этого события (они ему благоприятствуют, т. е. событие А наступает при любом из этих исходов).

Например:

а) выпадает герб: m = 1;

б) на кубике выпадет четное число: m = 3;

в) из колоды вытянут туза: m = 4.

Вероятностью случайного события А в этой ситуации назовем дробью m/n, где n - число всех возможных исходов эксперимента, m - число исходов, благоприятных для события А:

P(A)= m/n

Обозначение P(A) происходит от первой буквы французского слова probabilite - вероятность.

Например:

а) P {выпадет герб} = 1/2

б)P {на кубике выпадет четное число} = 3/6 = 1/2;

в)P { из колоды вытянут туза} = 4/36 = 1/9

Пример 1. Колоду из 36 карт хорошо перетасовали и вынули из нее одну карту. Для каждого из следующих событий найдём его вероятность:

A = {вынули красную масть};

B = {вынули пику};

C = {вынули красную пику};

D = {вынули даму};

E = {вынули даму пик}.

Все пять событий относятся к одному и тому же случайному эксперименту - вытягиванию карты из полной колоды. Общее число исходов в этом эксперименте равно 36 (по числу разных карт), причем, поскольку колода хорошо перетасована, все они равновозможны, следовательно, n = 36.

Для события *A* благоприятный исход - любая карта красной масти. В колоде 18 карт красной масти, значит m = 18.

Следовательно, *P(A)* = 18/36 = 1/2 = 0,5.

Для события *B* благоприятный исход - любая пик. Таких исходов 9 (столько в колоде карт пиковой масти):

m - 9 отсюда *P(B)* = 9/36=1/4=0,25.

Совершенно аналогично находим число благоприятных исходов и вероятности для оставшихся событий:

для события *C m = 0, P(C)* = 0/36 = 0;

для события D *m = 4, P(D)* = 4/36 = 1/9 =0,111;

для события *E m = 1, P(E)* = 1/36 = 0,028.

Рассмотренное выше определение вероятности было впервые дано в работах французского математика Лапласа и называется классическим. Использовать его можно только для опытов с равновозможными исходами!

Другой великий француз - Даламбер - вошел в историю теории вероятностей со своей знаменитой ошибкой, суть которой в том, что он не верно определил равно возможность исходов

Пример 2. Ошибка Даламбера. Какова вероятность, что подброшенные вверх две правильные монеты упадут на одну и ту же сторону?

Решение, предложенное Даламбером.

Опыт имеет три равновозможных исхода:

1)обе монеты упали на «орла»;

2)обе монеты упали на «решку»;

3)одна из монет упала на «орла», другая на «решку»

Из них благоприятными для нашего события будут 2 исхода, поэтому искомая вероятность равна 2/3.

Правильное (!) решение. Опыт имеет четыре равновозможных исхода:

1) первая монета упала на «орла», вторая тоже на «орла»;

2) первая монета упала на «решку», вторая тоже на «решку»;

3) первая монета упала на «орла», а вторая - на «решку»;

4) первая монета упала на «решку», а вторая - на «орла».

Из них благоприятными для нашего события будут 2 исхода, поэтому искомая вероятность равна 2/4 = 1/2.

Даламбер совершил одну из самых распространенных ошибок, допускаемую при вычислении вероятности: он объединил два принципиально разных исхода в один. Чтобы не повторить эту ошибку, помните, что *природа различает все предметы*, даже если внешне они для нас неотличимы.

В этом параграфе мы будем вычислять вероятности событий не проводя эксперимент, опираясь только на симметрию объектов опыта и равновозможность всех исходов.

Замечательно при этом, что вычисленная a priori вероятность оказывается тем самым числом, к которому будет стремиться частота при неограниченном увеличении числа опытов.

Ничего «мистического» в этом совпадении нет: ведь если все n возможных исходов эксперимента равновозможны, то их относительные частоты должны быть приблизительно равны. Поскольку в сумме они всегда дают 1, то каждая из частот сростом числа экспериментов будет приближаться к 1/n. Относительная частота события *A* будет равна сумме m из этих n частот и, значит, будет приближаться к m/n. Поэтому наше новое, классическое определение вполне согласуется с данным ранее статистическим.

77. Для каждого из следующих событий найдите число всех равновозможных исходов, число благоприятных исходов и вероятность.

а) В урне 15 белых и 25 черных шаров. Из урны наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что он будет белым?

б) Из русского алфавита случайным образом выбирается одна буква. Какова вероятность того, что она окажется гласной?

в) Из слова ***СОБЫТИЕ*** *случайным образом выбирается одна буква. Какова вероятность того, что она окажется гласной?*

г) Из 365 дней 2001 года случайно выбирается один. Какова вероятность, что он будет воскресеньем, если известно, что 2001 год начинается в понедельник?

78. Определите вероятности следующих событий:

A={при бросании монеты выпал «орел»};
B={при бросании кубика выпала тройка};
C={при бросании кубика выпало четное число};
D={из колоды карт вытянули туза};
E={из колоды карт вытянули шестерку};
F={из колоды карт вытянули не туза}.

79.Абонент забыл последнюю цифру телефонного номера и набрал ее наудачу, помня только, что эта цифра нечетная. Найдите вероятность того, что номер набран правильно.

80.Федя хочет определить, с какой вероятностью при бросании двух кубиков можно получить сумму в 12 очков.

Он рассуждает так: сумма очков на двух кубиках может равняться любому из 11 чисел от 2 до 12. Значит, вероятность получить 12 очков будет 1/11. Прав ли Федя?

81. Какова вероятность того, что у случайно выбранного жителя Земли день рождения приходится на:

а) 1 января;

б) 28 февраля;

в) 29 февраля?

82 Вы должны получить квартиру в строящемся 40 - квартирном доме.

а) Какова вероятность того, что в ее номере не будет нечетных цифр?

б) Вам сообщили, что в номере вашей будущей квартиры не будет нечетных цифр.

С какой вероятностью вы можете угадать этот номер?

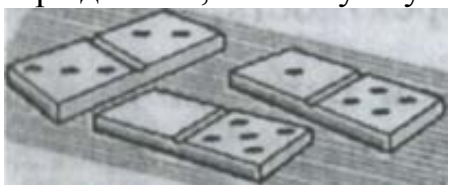
83. В классе учится 10 мальчиков и 20 девочек.

а) На класс дали один билет в цирк, который решено разыграть по жребию. Какова вероятность, что в цирк пойдет девочка?

б) Учитель истории знает, что 3 мальчика и 5 девочек из класса были накануне в кино, поэтому не выучили домашнее задание. К сожалению, он не знает их фамилий, но очень хочет поставить кому-нибудь двойку. Кого ему лучше вызвать к доске - мальчика или девочку?

в) Федя не решил домашнюю задачу по математике, вероятность, что учитель этого не узнает, если за урок он успевает спросить пятерых?

84. Какова вероятность того, что «доминошка», наудачу извлеченная из полного набора домино, имеет сумму очков равную 5 (см. рис.)?



85.1) Для школьного новогоднего вечера напечатали 125 пронумерованных пригласительных билетов, между которыми предполагается разыграть главный приз. Какова вероятность, что номер счастливчика будет заканчиваться:

а) на тройку; б) на девятку?

2) В условиях задачи 1) Вова получил пригласительный билет с номером 33, а Таня - 99. Верно ли, что у Вовы больше шансов получить главный приз?

86. Даны отрезки длиной 2, 5, 6 и 10 см.. Какова вероятность того, что из наудачу выбранных трех отрезков можно составить треугольник?

Б

87. Наудачу выбрано двузначное число. Определите вероятность того, что оно оказалось:

а) простым;

б) составным;

в) кратным пяти;

г) взаимно простым с числом 100?

88.Наудачу выбрано число от 1 до 1 000 000. Какова вероятность того, что оно является полным квадратом.

89.1) В корзине яблоко и груша. Вытаскиваем из нее один фрукт. Какова вероятность того, что это яблоко?

2)В корзине 2 яблока и груша. Вытаскиваем из нее 2 фрукта. Какова вероятность того, что оба фрукта яблоки ?

3)В корзине N яблок и груша. Вытаскиваем из нее N фруктов. Какова вероятность, что все они яблоки?

90.1)У маленькой Вари две одинаковые пары варежек. Уходя на улицу, она наугад берет две варежки. Какова вероятность того, что они окажутся парными (т. е. на разные руки)?

2) Варя потеряла одну из варежек на улице, и теперь их у нее три. Уходя на улицу, она по-прежнему выбирает две варежки случайным образом. Какова на этот раз вероятность, что они окажутся парными?

91. 1) Из колоды домино изъяли все «доминошки» с пустышками и после этого наудачу выбрали одну «доминошку». Какова вероятность, что сумма очков на ней равна 5? .

2) Бросали два кубика. Какова вероятность, что сумма очков на них равна 5?

92. 1) В лотерее участвует 100 билетов и разыгрывается один приз. Какова вероятность того, что вы ничего не выиграете на свой единственный билет?

2) Участвуя в той же лотерее, вы купили 20 билетов. Какова вероятность, что вы опять останетесь ни с чем?

93. Монету бросают до первого появления «орла». Какова вероятность, что для этого понадобится:

а) одно бросание; б) два бросания; в) три бросания?

94. Кубик бросают до первого появления шестерки. Какова вероятность, что для этого понадобится:

а) одно бросание; б) два бросания; в) три бросания?

95*. Придумайте такие длины четырех отрезков, чтобы вероятность составить треугольник из наудачу выбранных трех отрезков получилась равной:

а)0; б) 1/4; в) 3/4; г) 1.

96*. Три господина, придя в ресторан, сдали в гардероб свои шляпы. Расходились по домам они уже в темноте и разобрали шляпы наугад. Найдите вероятности следующих событий:

А ={каждый надел свою шляпу};

В ={все надели чужие шляпы}:

С= {двое надели чужие шляпы, а один - свою};

О= {двое надели свои шляпы, а один - чужую}.

6.Сколько изюма в булке и сколько рыб в пруду?

Статистическое оценивание и прогноз

В заключение еще раз поговорим о том, какую практическую пользу можно извлечь из подсчета вероятностей. Точнее, вы научитесь решать три важнейших типа статистических задач:

оценивать частоту по известной вероятности;

предсказывать наиболее вероятный исход данного опыта;

проверять статистические гипотезы.

Вы знаете, что с ростом числа экспериментов частота стремится к вероятности. Значит, по *известной вероятности можно* ***прогнозировать*** *частоту* повторения интересующего нас события в будущем. При этом вероятность может быть найдена любым из известных нам способов (в том числе оценена по уже имеющейся частоте).

Пример 1. При проведении контроля качества среди 1000 случайно отобранных деталей оказалось 5 бракованных. Сколько бракованных деталей следует ожидать среди 25 000 деталей?

По результатам контроля можно оценить вероятность события А={*произведенная деталь бракованная*}. Приближенно она будет равна его частоте:

$$P(A) \sim \frac{5}{1000} = 0{,}005.$$

Следует ожидать такую частоту и в будущем, поэтому среди 25 000 деталей окажется около 25 000 • 0,005 = 125 бракованных.

Пример 2. Население города Калуги составляет около 400 000 жителей. Сколько калужан родились 29 февраля?

Заметим, прежде всего, что вопрос задачи не совсем корректен: мы можем ответить на него лишь приближенно, ибо реальная частота даже в такой большой выборке из 400 000 жителей не обязана совпадать с вероятностью.

29 февраля бывает только в високосном году — один раз в четыре года, следовательно, для случайно выбранного человека его день рождения попадает на 29 февраля с вероятностью

$$\frac{1}{3 \cdot 365 + 366} = \frac{1}{1461} = 0{,}00068.$$

Это значит, что среди 400 000 жителей Калуги следует ожидать около

$$400000 \cdot \frac{1}{1461} \sim 274 \text{ человек,}$$

которым приходится праздновать свой день рождения раз в четыре года.

На прогнозировании частоты основан один интересный способ определения численности популяций, используемый в биологии.

Пример 3. Из озера выловили 86 рыб, которых пометили и отпустили обратно в озеро. Через неделю произвели повторный отлов - а этот раз поймали 78 рыб, среди которых оказалось 6 помеченных. Сколько приблизительно рыб живет в озере?

Оказывается, найти ответ на этот неожиданный вопрос совсем несложно. В самом деле: обозначим неизвестную нам численность рыб в озере через N. Тогда
вероятность поймать помеченную рыбу в озере будет $\frac{86}{N}$.

С другой стороны, эта вероятность должна приближенно равняться полученной во втором улове частоте:

$$\frac{86}{N} \sim \frac{6}{78}.$$

Отсюда $N \sim \frac{86 \cdot 78}{6} = 1118.$

Сравнивая вероятности всех возможных исходов эксперимента, можно предсказывать, каким из них эксперимент закончится, скорее всего. Обратите внимание, что мы говорим «скорее всего», а не «наверняка» — ведь любой статистический прогноз может оказаться ошибочным.

Пример 4. Какая сумма, скорее всего, выпадет при бросании двух кубиков?

Поскольку мы уже считали вероятности всех возможных исходов в таком эксперименте, то знаем, что максимальную вероятность имеет сумма 7, а ее вероятность составляет 1/6 . Разумеется, сама по себе эта вероятность не слишком велика, и ожидать, что при первом же бросании выпадет сумма 7, вряд ли стоит. Тем не менее из всех возможных сумм она наиболее вероятная.

Если в основу вычисления вероятности была положена некоторая **гипотеза**, а полученные в реальном эксперименте частоты с ней явно расходятся, то *есть повод усомниться в этой гипотезе.*

Пример 5. В 10 бросаниях монеты вы получили 9 «орлов». Следует ли считать монету правильной?

Если бы монета была правильной (это и есть та гипотеза, в которой мы усомнились), то получить 9 или 10 «орлов» в 10 бросаниях можно было бы с вероятностью

$$P = \frac{10+1}{2^{10}} \sim 0{,}01$$

Значит, в результате опыта произошло очень редкое, **маловероятное** событие (Какие события считать маловероятными, во многом зависит от договоренности. Мы будем считать маловероятными события, вероятность которых не превышает 0,01.).

В то же время, если предположить, что монета неправильная и вероятность выпадения «орла» на ней больше 1/2 , то произошедшее событие уже не будет таким невероятным. Это дает нам все основания считать, что монета несимметричная.

В большинстве приводимых ниже задач вам придется отвечать на некорректные вопросы типа «Сколько изюма в булке?» или «Сколько рыб в пруду?». Помните, что во всех задачах речь идет лишь о вероятностной оценке неизвестной величины, но сделать ее нужно наилучшим образом.

203.В коробке 100 шаров белого и черного цвета. Из нее 60 раз вынули шар, возвращая его каждый раз обратно. При этом белый шар появился в 18 случаях. Сколько белых шаров в коробке?

204.Включая в течение месяца телевизор около 150 раз, Вова в 30 случаях попадал на рекламу. Какой про цент от времени телевизионных трансляций занимает реклама?

205.В Москве около 10 млн. жителей. Сколько жителей Москвы празднуют свой день рождения 1 января?

206.Воспользовавшись календарем, посчитайте, какому проценту российских школьников в этом году не нужно идти в школу в свой день рождения.

207.Среднестатистический житель России ежедневно проводит у телевизора около двух с половиной часов. Можно ли по этим данным оценить, сколько часов вы проведете у телевизора в ближайший месяц?

208.Будем считать вероятности рождения мальчика и девочки одинаковыми. Ответьте на следующие некорректные вопросы, подразумевая, что в них добавлена фраза «скорее всего».

а) В семье два ребенка. Какого они пола?

б) В семье три ребенка. Сколько из них имеет одинаковый пол?

в) В семье четыре ребенка. Сколько из них мальчиков ?

209.Средняя частота попадания в мишень в тире - 0,6. За день около 100 пуль улетели «в молоко». Сколь всего выстрелов было сделано?

210.На шахматную доску 100 раз бросили монету радиусом 1 см. В 64 случаях монета целиком оказывалась внутри какой-нибудь клетки. Оцените размер одной клетки шахматной доски.

211.В изгородь, состоящую из тонких вертикальных прутьев, 50 раз бросили мяч диаметром 10 см. При этом 18 раз мяч пролетел сквозь изгородь, не задев прутья. Оцените расстояние между прутьями.

212.Комитет по проведению лотерей утверждает, что среди билетов лотереи «Спринт» половина выигрышных, Женя купил два билета этой лотереи и ничего не выиграл. Есть ли у Жени повод усомниться в честности ее устроителей?

213.При бросании кубика три раза подряд выпала шестерка. Есть ли основания думать, что он неправилен?

214.Экзамен по истории включает 60 вопросов. Вова утверждает, что подготовил 80% всех вопросов экзамена. Папа задал ему три вопроса, ни на один из которых он не ответил. Есть ли у папы основания подозревать сына во лжи?

Б

215.Из озера выловили 86 рыб, которых пометили и отпустили обратно в озеро. Через неделю произвели повторный отлов — на этот раз поймали 78 рыб, среди которых не оказалось ни одной помеченной! Что можно сказать о количестве рыб, живущих в озере?

216.Перед тем как начать серию испытаний с кубиком, ребята высказали такие предположения:

Егор: Шестерка впервые появится в 6-м испытании.

Олег: Шестерка впервые появится в 1-м испытании.

Глеб: Шестерка впервые появится в 3-м испытании.
У кого из них больше шансов, что сделанный им прогноз оправдается?

217.Вам сдают из колоды 6 карт. Сколько тузов вы, скорее всего, получите?

218.Бросают три кубика. Каково наиболее вероятное значение суммы?

219.Абонент забыл последнюю цифру в номере теле фона и набирает ее наугад. Сколько попыток, скорее все го, ему придется сделать?

220*. 5 шариков разбрасывают по 5 ящикам. Каково наиболее вероятное число пустых ящиков?

221*. 100 шариков случайно разбрасывают по 100 ящикам. Оцените, сколько приблизительно ящиков окажутся пустыми.

222*. Из 100 килограммов стекла делают 100 бутылок. В массе стекла 100 камешков. Оцените, сколько приблизительно бутылок окажется:
а)без камешков;
б)с одним камешком;
в)с двумя и более камешками.

223*. У вас есть некоторые подозрения, что шестерка на кубике вашего соперника выпадает чаще обычного. Сколько шестерок должно выпасть в десяти бросаниях кубика, чтобы ваши предположения подтвердились?

224. Цех по производству лампочек должен производить не более 2% брака. Из очередной партии было бы брано 10 лампочек, среди которых 2 оказались бракованными. Есть ли у службы контроля основания забраковать всю партию?

225.
1) Замок на подъезде имеет 10 кнопок с цифрам от 0 до 9 и открывается одновременным нажатием на определенные три кнопки. Подошедший к подъезду человек открыл замок с третьего раза. Знал ли он что-либо о коде замка?

2) На сколько цифр нужно закрывать замок из предыдущей задачи, чтобы подобрать к нему шифр было труднее всего?

226*. Женя купил в магазине булочку с изюмом, но изюма в ней не обнаружил. Есть ли у Жени основания подозревать, что изюм воруют, если средняя норма изюма на одну булку — 30 штук?

227. Комитет по проведению лотерей утверждает, что среди билетов лотереи «Спринте» половина выигрышных Сколько билетов нужно купить и ничего на них не выиграть, чтобы усомниться в честности устроителей?

228*. Тест содержит 25 вопросов. На каждый вопрос предлагается два варианта ответа, из которых нужно выбрать правильный. За сколько правильных ответов следует ставить положительную оценку?